

СЕРВАНТНЫЕ ПОДКОЛЬЦА КОЛЕЦ $\mathbb{Z}_\chi$

А.В. Царев

Московский педагогический госуниверситет,

Краснопрудная 14, 107140 Москва, Россия

an-tsarev@yandex.ru

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная всеми простыми числами. Этой последовательности поставим в соответствие набор колец K_p , где $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел или $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ соответственно при $m_p = \infty$ и $m_p < \infty$. Кольцо $\prod_{p \in P} K_p$ будем обозначать $\mathbb{Z}_\chi$. Через ε_p обозначим единицу кольца K_p и ее образ при естественном вложении $K_p \rightarrow \mathbb{Z}_\chi$.

Пусть $x = (x_p)$ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Ему соответствует идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$, такой что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Рассмотрим группу $L(x)$, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x в идеале $\xi\mathbb{Z}_\chi$,

$$L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \xi\mathbb{Z}_\chi.$$

Нетрудно видеть, что множество $L(x)$ замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, определенных в кольце $\mathbb{Z}_\chi$.

Теорема 1. $L(x)$ является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $L(x)$ имеет конечный ранг;
- 2) элемент x почти не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент.

Следствие 1. Если $L(x)$ — кольцо конечного ранга, то $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 — нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ — кольцо с единицей.

Многочлен f будем называть минимальным многочленом элемента x , если f — целочисленный многочлен наименьшей степени, такой что $f(x) = 0$. Минимальный многочлен не обязан быть нормированным, в связи с этим он определен не однозначно, однако, нетрудно видеть, что любые два минимальных многочлена одного и того же элемента могут отличаться только целыми множителями.

Теорема 2. Если $L(x)$ — бесконечное кольцо с единицей, f — минимальный многочлен элемента x и $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \dots f_k^{r_k}$ — его каноническое разложение над кольцом $\mathbb{Z}$, то

- 1) $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2) \oplus \dots \oplus L(x_k)$, причем $f_i^{r_i}$ является минимальным многочленом элемента x_i для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) слагаемые в разложении из п. 1) определяются однозначно с точностью до порядка следования и конечных прямых слагаемых.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ, № МК-3345.2007.1