. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ДВУМЯ НЕДОПОЛНЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Тютянов, П.В. Бычков

[1] Гомельский госуниверситет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
tyutyanov@front.ru, pbychkov@tut.by

Описываются конечные группы, содержащие в точности две недополняемые подгруппы. Группы, содержащие систему подгрупп с заданными условиями, изучались в работах Ф.Холла [1], С.Н. Черникова [2, 3], Н.В. Черниковой (Баевой) [4, 5], а также Ю.М. Горчакова [6, 7]. Подгруппу L назовем дополняемой в группе G, если в группе G существует подгруппа K такая, что $L \cap K = 1$ и $G = LK$. Группу называют вполне факторизуемой, если в ней дополняема любая подгруппа. В работе Г.А. Маланьиной [8] был рассмотрен класс групп с единственной недополняемой подгруппой. При этом было установлено, что группы с таким условием конечны и являются p-группами. Случай, когда число недополняемых подгрупп в группе больше единицы, значительно сложнее. В данной работе приведено описание конечных групп с двумя недополняемыми подгруппами.

Пусть p и t — различные простые числа, D_8 — группа диэдра порядка 8, $M(p)$ и $M_3(p)$ — экстраспециальные группы нечетного порядка p^3 экспоненты p и p^2 соответственно [9, см. гл. 5]. В данных обозначениях доказан следующий результат.

Теорема 1. *Конечная группа G имеет в точности две недополняемые подгруппы тогда и только тогда, когда:*

1. G — абелева группа и $G \in \{Z_{p^3}; Z_{p^2} \times Z_p; Z_{p^2} \times Z_t\}$.

2. G — неабелева группа одного из следующих типов:

(a) $G \cong D_8 \times Z_p$, p — нечетное число.

(b) $G \cong [Z_{4p}]Z_2$, p — нечетное число.

(c) G — бипримарная группа порядка $2^3 \cdot p$, с диэдральной силовской 2-подгруппой $[\langle x \rangle]\langle \tau \rangle$, где $|x| = 4$, $|\tau| = 2$ и $G = [\langle l \rangle \times (\langle x^2 \rangle \times \langle \tau \rangle)]\langle \mu \rangle$, где μ — инволюция, $|l| = p$, $l^\mu = l^{-1}$, $(x^2)^\mu = x^2$, $\tau^\mu = x^2\tau$.

(d) $G \cong Z_t \times M(p)$.

(e) G — бипримарная группа порядка $p^3 \cdot t$, с силовской p-подгруппой $P \cong M(p)$ и $P =$ char"3D $\langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ab = bac, ac = ca, ab = ba \rangle$ и $G = [\langle l \rangle \times (\langle c \rangle \times \langle a \rangle)]\langle b \rangle$, где $|l| = t$, $l^b = l^{-1}$, $c^b = c$, $a^b = ac$.

(f) G — группа Шмидта типа $\{t, p^2\}$ для подходящих значений p и t.

(g) $G \cong D_8 \times Z_2$.

(h) $G \cong M(p) \times Z_p$.

(i) $G \cong M_3(p)$.

Литература

1. *Hall P.* Complemented groups J. London Math. Soc. 1937. V. 12. 201–204.
2. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М., Наука, 1980. 382 с.
3. *Черников С.Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Матем. сб. 1954. Т. 35(77). № 1. С. 93–128.
4. *Баева Н.В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. №5. С. 877–880.
5. *Черникова Н.В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Матем. сб. 1956. Т. 39(81). № 3. С. 273–292.
6. *Горчаков Ю.М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
7. *Горчаков Ю.М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Пермск. ун-та. 1960. № 17. С. 15–31.
8. *Маланьина Г.А.* Группы с одной недополняемой подгруппой // В кн. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев, 1993. с. 188–194.
9. *Gorenstein D.* Finite groups. New-York.: Harper and Row. 1968.