О ГРУППАХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ

А.А. Трофимук

Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины,
ул. Советская 104, Гомель, 246019
trofim08@yandex.ru

Одним из важнейших направлений теории конечных групп является изучение строения групп с заданными свойствами силовских подгрупп. В работе В.С. Монахова [1] получена оценка производной длины фраттиниевого фактора группы ограниченного порядка. В настоящее время при исследовании таких групп активно используется система компьютерной алгебры GAP. Хорошо известна статья [2] о конечных группах свободных от кубов.

В данной работе исследуется строение группы нечетного порядка с ограничениями на силовские подгруппы. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — группа нечетного порядка, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо порядка p^i, $i \in \{2,3,4\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $i \in \{2,3\}$, то*

(1.1) *производная длина группы G не превышает 3;*

(1.2) *G - дисперсивная группа;*

(1.3) *G — дисперсивна по Оре, если каждое простое q из $\pi(G)$ не делит p^2+p+1 для всех простых $p \in \pi(G)$;*

(2) *Если $i \in \{2,3,4\}$, то производная длина группы G не превышает 4.*

В дальнейшем, $G = [P]Q$ — полупрямое произведение подгрупп P и Q группы G.

Пример 1. Показатель числа 5 по модулю 3 равен 2. По теореме Гольфанда [3] существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P неабелева порядка 5^3, а Q — циклическая подгруппа порядка 3. Так как P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G' = P$. Таким образом, $(G')' = Z(P)$ и $d(G) = 3$. Следовательно, оценка производной длины, полученная в теореме, для $i \leqslant 3$ является точной. Кроме того, данная группа является дисперсивной по Оре.

Пример 2. Показатель числа 5 по модулю 31 равен 3. По теореме Гольфанда [3] существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P абелева порядка 5^3, а Q — циклическая подгруппа порядка 31. Данная группа не является дисперсивной по Оре.

Пример 3. Хорошо известно, что в группе $GL(3,3)$ имеется нециклическая подгруппа $[Z_{13}]Z_3$ порядка 39. Эта подгруппа $[Z_{13}]Z_3$ является группой автоморфизмов для элементарной абелевой группы E_{3^3} порядка 27. Согласно теореме 2.47 [4] существует группа $G = [E_{3^3}]([Z_{13}]Z_3)$, которая недисперсивна и ее порядок равен $3^4 13$. Таким образом, группа нечетного порядка, силовские подгруппы которых либо циклические, либо имеют порядки делящие четвертые степени простых чисел, не обязана быть дисперсивной.

Литература

1. *Монахов В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп // Алгебра и логика. 2004. 43, № 4. С 411–424.

2. *Dietrich H., Eick B.* On the groups of cube-free order // J. Algebra. 2005. V. 292. P. 122–137.

3. *Монахов В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Алгебра і теорія чисел: Праці Українського математичного конгресу. 2001. КиїВ: Ін-т математики НАН України, 2002. С. 81–90.

4. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа. 2006.