О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДКЛАССАХ МИНИМАЛЬНОГО π-НОРМАЛЬНОГО КЛАССА ФИТТИНГА

Н.В. Савельева[1]

[1] Витебский госуниверситет им. П.М. Машерова,
Московский 33, 210038 Витебск, Беларусь
nato2000@tut.by

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется максимальным (по включению) подклассом Фиттинга класса Фиттинга $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из того, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$.

Основополагающие результаты по описанию максимальных подклассов Фиттинга и их взаимосвязи с нормальными классами Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех групп были получены Брайсом и Косси [2]. Примечателен тот факт, что каждый класс Фиттинга, максимальный в $\mathfrak{S}$, является нормальным. В связи с этим была сформулирована

Проблема А (Х. Лауш, 9.18 [3]). *Существуют ли максимальные по включению подклассы Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\star$?*

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в работе [4].

Вместе с тем самостоятельный интерес представляет результат А.Н. Скибы о том, что каждая локальная формация не имеет максимальных подформаций (см. [5], пример 5.1.1). Поиск аналога указанного результата в теории классов Фиттинга обусловила

Проблема Б (А.Н. Скиба, 13.50 [3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?*

Отрицательное решение этой проблемы было анонсировано [6].

Определение 1. *Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех π-групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ или π-нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G.*

Лемма 1. *Если π — непустое множество простых чисел, то $(\mathfrak{S}_\pi)_\star$ — единственный нетривиальный минимальный π-нормальный класс Фиттинга.*

В связи с этим естественен следующий аналог проблемы А, который представляет

Вопрос. *Существуют ли максимальные по включению подклассы Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга?*

Отрицательный ответ для случая, когда максимальные подклассы локальны, дает

Теорема 1. *Если π — непустое множество простых чисел, то в классе Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)_\star$ нет нетривиальных максимальных локальных подклассов Фиттинга.*

Литература

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble Groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

2. *Bryce R.A., Cossey J.* Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol 10. P. 169–175.

3. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 // Институт математики СО РАН. 1999. 135 с.

4. *Воробьев Н.Т.* О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 6. С. 485–487.

5. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

6. *Воробьев Н.Т.* О проблеме существования максимальных классов Фиттинга // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта імя П.М Машэрава. 1997. Т. 6. № 4. С. 60–62.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Н.В. Сакович

МГУ им. Кулешова. ул. Космонавтов, Могилев 1, Беларусь
sakovichnv@tut.by

Определить дискриминант $D(P)$ многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + +a_0$ с высотой $H = \max_{0\leqslant j\leqslant n}|a_j|$ и корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно двумя способами. Дискриминант $D(P)$ можно задать как определитель

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & \ldots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \ldots & a_1 & 0 & \ldots \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & \ldots & 2a_2 & a_1 & \ldots \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & na_n & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

или как произведение разностей корней

$$D(P) = a_n^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть Q достаточно большое число, $Q > Q_0(n)$. Обозначим через $\mathcal{P}_n(Q)$ класс многочленов $P(x)$ таких, что $\deg P \leqslant n$ и $H(P) \leqslant Q$. Относительно дискриминантов многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ доказано две теоремы.

Теорема 1. *Для любого значения Q существует многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, что при некотором c, модуль значения дискриминанта лежит в интервале $I = [1, c2^{n(n-1)(n+7)/3}]$.*

Теорема 2. *Для фиксированного Q пусть $\frac{1}{2}Q^{1/n} < q_i < 2Q^{1/n}$. Тогда не существует многочленов $P(x)$ вида $\prod_{i=1}^{n}(q_ix - p_i)$, $\frac{q_i}{p_i} \neq \frac{q_j}{p_j}$, значением модуля дискриминанта которого для $n > n_0$ лежит в интервале $[1, e^{0.5n^2\ln n}]$.*

Теоремы 1 и 2 представляют интерес в метрической теории диофантовых приближений [1, 2].

Литература

1. *Спринджук В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн.: Наука и техника, 1967.

2. *Bernik V.I., Dodson M.M.* Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge Univ. Press: Cambridge Tracts in Math , 1999. Vol. 137.