сформулирована задача описания групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Нами получено полное описание разрешимых ненильпотентных групп с перестановочными 3-максимальными подгруппами в случае, когда порядок группы делится в точности на три простых числа.

Теорема. Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов:

(1) $G = [P \times R]Q$, где P — элементарная p-группа, R — элементарная r-группа, $Q = =< a >$ — циклическая q-группа, $|P| = p^\sigma, |R| = r^\sigma$, σ есть показатель чисел p и r по модулю q, $< a^q > \subseteq Z(G)$ и $C_G(a) = < a >$;

(2) $G = ([P]Q) \times C_r$, где P — элементарная p-группа, Q — силовская q-подгруппа в G, $|C_r| = r$ и PQ — группа Шмидта;

(3) $G = (C_p \times C_q)[R]$, где $|C_p| = p$, $|C_q| = q$, R — элементарная r-группа, C_pR и C_qR — группы Шмидта.

Литература

1. *Skiba A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины 2006. Т. 36. № 3. С. 12–31.

О СВОЙСТВЕ ХАУСОНА НЕКОТОРЫХ АСФЕРИЧЕСКИХ ПРО-p-ГРУПП

О.В. Мельников

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
algebra@bsu.by

Хаусон [1] доказал, что пересечение любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 абстрактной свободной группы также конечно порождено (и получил оценку сверху для числа порождающих подгруппы $H_1 \cap H_2$ в виде некоторой функции от чисел порождающих подгрупп H_i, $i = 1, 20$. Обобщая этот результат, Бернс [2] установил, что свойством Хаусона обладают дискретные фуксовы группы.

Про-p-аналогом фуксовых групп являются введенные в [3] планарные про-p-группы. С помощью про-p-варианта теории Басса — Серра (см. [4]) доказана следующая

Теорема 1. *Произвольная планарная про-p-группа G обладает свойством Хаусона.*

Подгруппы H_i, $i = 1, 2$, группы G предполагаются, разумеется, замкнутыми. К сожалению, оценки для числа (топологических) порождающих $H_1 \cap H_2$ получить не удалось. Нет такой оценки и в работе [5], основной результат которой вытекает из сформулированной выше теоремы в случае, когда подгруппа $\langle H_1, H_2 \rangle$ является свободной про-p-группой. Отметим, что получение такой оценки в случае свободных про-p-групп является одной из проблем, сформулированных в монографии [6].

Планарные про-p-группы составляют важный подкласс в классе асферических про-p-групп, исследованных в [7]. Интересно было бы выяснить, какие еще асферические про-p-группы обладают свойством Хаусона.

Литература

1. *Howson A.G.* On the intersection of finitely generated free groups // J. London Math.Soc. 1954, Vol. 29. P. 428–434.

2. *Burns R.G.* On the rank of the intersection of subgroups of a Fuchsian group // Lect. Notes. Math. 1974. Vol. 372. P. 165–187.

3 *Мельников О.В., Шишкевич А.А.* Про- p-группы с виртуальной двойственностью Пуанкаре размерности 2 // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 1. С. 13–15.

4. *Залесский П.А., Мельников О.В.* Фундаментальные группы графов проконечных групп // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 4. С. 117–135.

5. *Lubotzky A.* Combinatorial group theory for pro- p-groups // J. Pure Appl. Algebra. 1982. Vol. 25. P. 311–325.

6. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite Groups. Berlin: Springer, 2000.

7. *Мельников О.В.* Асферические про-р-группы // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 11. С. 71–104.

О БУЛЕВЫХ ПОДРЕШЕТКАХ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.П. Мехович[1], **В.О. Побойнев**[2]

[1] УО "Полоцкий аграрно-экономический колледж",
ул. Октябрьская 55, 211413 Полоцк, Беларусь
pgaek@tut.by

[2] УО "Витебский государственный университет им. П.М. Машерова",
Московский проспект 33, 210038 Витебск, Беларусь
vadik20082008@yandex.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию из [1, 2].

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Напомним, что символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа N со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N $(G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \cap\pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing 0$; символом $F_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. Для всякого ω-локального спутника f определяют класс $LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной и говорят, что f — ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ [2].

Всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями (см. [3]).

Пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — подгрупповой функтор [1], если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — подформации формации $\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{H}$ — τ-дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \bigcup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая подформация. Подформация формации $\mathfrak{F}$ называется τ-дополняемой в $\mathfrak{F}$ [1], если к ней имеется τ-дополнение в $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Следуя [1], будем писать $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (или иначе $\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n$ в случае, когда $I = \{1, \ldots, t\}0$, если для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \bigcap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторого натурального t и $i_1, \ldots, i_t \in I$. Для произвольной τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L^\tau_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Используя конструкцию прямого разложения классов групп, нами получено следующее описание булевых подрешеток решетки τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций: