

О ПОЧТИ ХОРОШИХ ТРОЙКАХ ВЕРШИН В РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

В.И. Казарин¹, А.А. Махнев²

¹ Орский гуманитарный институт, пр-т Мира 15а, 624016 Орск, Россия

² Институт математики и механики, Ковалевской 16, 620219 Екатеринбург, Россия

makhnev@imm.uran.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро графа Γ лежит в λ треугольниках. Для реберно регулярного графа с параметрами (v, k, λ) положим $b_1 = k - \lambda - 1$. Пара вершин u, w называется *(почти) хорошей*, если $d(u, w) = 2$ и $\mu(u, w)$ равно $k - 2b_1 + 1$ (равно $k - 2b_1 + 20$). Тройка вершин (u, w, z) называется *(почти) хорошей*, если $w, z \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, w) + \mu(u, z)$ не больше $2k - 4b_1 + 3$ (равно $2k - 4b_1 + 40$).

В [1] получена оценка для числа вершин, смежных с вершинами почти хорошей тройки. В данной работе эта оценка существенно уточняется.

Теорема 1. Пусть Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $k = 3b_1 - 2$, (u, w, z) — почти хорошая тройка, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) вершины w, z не смежны и $\delta = 0$;
- (2) вершины w, z смежны и либо $\delta \leq 2$, либо Δ является 3-кликкой и $b_1 = 6$.

С помощью результатов из [2, 3] получаем

Следствие 1. Пусть Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $k \geq 3b_1 - 2$, (u, w, z) — почти хорошая тройка, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Если $\delta > 2$, то вершины w, z смежны и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Δ является 3-кликкой, $b_1 = 3$ и Γ — граф Клебша;
- (2) Δ является 4-кликкой, $b_1 = 5$ и Γ — граф Шлефли;
- (3) Δ является 3-кликкой, $k = 16$ и $b_1 = 6$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (грант 08-01-90006) и РФФИ-ГФЕН Китая (грант 08-01-92200).

Литература

1. Махнев А.А., Падучих Д.В. Новая оценка для числа вершин в реберно регулярных графах // Сибирский матем. журнал 2007, Т. 48. С. 46–61.
2. Махнев А.А., Чуксина Н.В. О реберно регулярных графах, в которых каждая вершина лежит не более чем в одной хорошей паре // Владикавказский матем. журнал 2008, Т. 10, № 1. С. 53–67.
3. Махнев А.А., Чуксина Н.В. О хороших парах вершин в реберно регулярных графах с $k = 3b_1 - 1$ // Труды 39-й молод. конф. ИММ УрО РАН, Екатеринбург 2008, С. 35–37.