О БИРАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

А.А. Бондаренко

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220050 Минск, Беларусь
bondarenko@bsu.by

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K, $\mathrm{char} K \neq 2$.

Определение. *Если произведение $f(X)\cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.*

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о "сумме квадратов". Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1]). Проблема композиции сформулирована в [2] следующим образом: "Пусть f_1, f_2 — квадратичные формы от независимых переменных x_i, y_j. Когда произведение f_1, f_2 бирационально эквивалентно квадратичной форме ψ от переменных z_l?" В [3] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K.

Основная цель настоящего сообщения – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями.

Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над локальным полем P, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над P, следует из теоремы 1 статьи [3]: произведение $f(X)\cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над P тогда и только тогда, когда $h(Z)$ — любая ненулевая квадратичная форма размерности $n+m$, невырожденная часть которой изотропна над P.

Решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные над локальным полем, дает

Теорема 1. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные квадратичные формы размерности m и n над локальным полем P, $\mathrm{char} P \neq 2$, $m \leqslant n$. Тогда $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 4$, квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ не образуют бирациональную композицию над P при $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \notin P^{*2}$. В остальных случаях бирациональная композиция $h(Z)$ над P квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ определена однозначно с точностью до P-эквивалентности:*

a) если $1 = m \leqslant n \leqslant 4$, то $h(z_1, \ldots, z_{n+1}) = cg(z_1, \ldots, z_n)$, где $c \in D_P(f)$;

б) если $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \in P^{*2}$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = cg(z_1, z_2)$, где $c \in D_P(f)$;

c) если $2 \leqslant m \leqslant n = 4$ и $2 \leqslant m \leqslant n = 3$, то $h(z_1, \ldots, z_{m+n}) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2$, где $a, b \in P^*$, символ Гильберта $(a, b) = -1$.

Литература

1. *Lam K. Y.* Topological methods for studying the composition of quadratic forms // Quadratic and hermitian forms. Conf. Proc. Providence. Rhod Island. 1983. Vol. 4. P. 173–192.

2. *Платонов В.П., Черноусов В.И.* О рациональности канонических спинорных многообразий // ДАН СССР. 1980. Т. 152. № 4. С. 796–800.

3. *Бондаренко А.А.* О бирациональной композиции квадратичных форм // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56–61.