пары (x_j^a, i), обеспечивающие все соседства вершин графа G и никакие другие соседства вершин G, которые соседними в G не являются. Следовательно, будут соблюдаться и соседства вершин подграфа H, что по условию невозможно. Следовательно, граф G не может быть задан никакой КНФ. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что все неорграфы, содержащие простую цепь с шестью вершинами либо дерево специального вида (рис. 1) в качестве чистого подграфа, не задаются ни одной КНФ.

Как было показано выше, полный двудольный граф задается КНФ. Деревья также являются двудольными графами, но не все деревья задаются КНФ (например, простая цепь с шестью вершинами и дерево специального вида, изображенные на рис. 1 *а, б*). Рассмотрим произвольное дерево на n вершинах. Оно либо изоморфно простой цепи на n вершинах, либо изоморфно звезде на n вершинах, либо содержит в качестве чистого подграфа дерево специального вида (рис. 1 *б*). Простая цепь с шестью и более вершинами не задается КНФ согласно теореме 1, поскольку она содержит в качестве чистого подграфа цепь с шестью вершинами, которая не задается КНФ. Дерево, содержащее в качестве чистого подграфа дерево специального вида (рис. 1 *б*), также не задается ни одной КНФ на основании теоремы 1. Звезда с n вершинами задается КНФ, поскольку является полным двудольным графом. Итак, получаем, что из всех деревьев с шестью и более вершинами КНФ задается лишь звезда $K_{1,n}$. А это означает, что почти все деревья не задаются КНФ.

Работа выполнена под руководством В. А. Мощенского.

Литература

1. *Мощенский А. В, Мощенский В. А.* Математические основы информатики / 2-е изд., перераб. и доп. Минск: БГУ, 2008.

ОЦЕНКА ОБЪЕМА ПАМЯТИ, ТРЕБУЕМОЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ МАКРООПЕРАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

М. А. Полещук

Введение. Современные параллельные вычислительные архитектуры для повышения производительности имеют быструю локальную (разделяемую между ядрами одного процессора) память, управление которой осуществляется программно. В качестве целевого компьютера будем рассматривать графические процессоры с двухуровневой параллельной архитектурой.

Операции вычислительного алгоритма должны быть разбиты на множества, называемые зернами вычислений или тайлами. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений. По причине небольшого размера разделяемой памяти необходимо для каждого массива оценить количество его элементов, к которым осуществляется доступ при выполнении операций зерна вычислений [1, 2]. Данная оценка естественным образом влияет на размер тайлов вычислительного алгоритма. Если часто используемые элементы массивов не помещаются в разделяемой памяти, необходимо уменьшить размер зерна вычислений.

В данной работе разрабатывается математический аппарат для оценки объема памяти, требуемой для выполнения макроопераций вычислительного алгоритма: получена оценка, которая выполняется для любых тайлов алгоритма.

Предварительные сведения. Пусть алгоритм задан многомерным циклом произвольной структуры вложенности, операторы которого линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим: S_β – некоторый оператор с порядковым номером β, V_β – область изменения параметров циклов для оператора S_β, n_β – число циклов, окружающих оператор S_β, $W_l \subset \mathbb{Z}^{v_l}$ – область изменения индексов l-го массива, где v_l – размерность l-го массива. Вхождением (l,β,q) будем называть q-е вхождение массива a_l в оператор S_β. Пусть индексы элементов массива a_l, связанных с вхождением (l,β,q) выражаются функцией $\overline{F}_{l,\beta,q} : V_\beta \to W_l$ вида

$$\overline{F}_{l,\beta,q}(J) = F_{l,\beta,q} J + f^{l,\beta,q}, \ \ J \in V_\beta, \ F_{l,\beta,q} \in \mathbb{Z}^{v_l \times n_\beta}, \ f^{l,\beta,q} \in \mathbb{Z}^{v_l}. \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольный тайл, заданный вектором J^{gl} для набора операторов ϑ. Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. n^ϑ – число циклов, окружающих ϑ-й набор операторов. Определим полный тайл – это тайл, число итераций которого равно произведению компонент вектора r^ϑ, где r^ϑ_ζ обозначает число значений параметра j^ϑ_ζ, приходящихся на один тайл ϑ-го набора операторов. r^ϑ_ζ может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до $M^\vartheta_\zeta - m^\vartheta_\zeta + 1$, где $m^\vartheta_\zeta = \min j^\vartheta_\zeta$, $M^\vartheta_\zeta = \max j^\vartheta_\zeta$ – предельные значения изменения параметра цикла уровня вложенности ζ. Пусть $s^\vartheta \in Z^{n^\vartheta}$ – вектор, компоненты которого равны единице или нулю; $s_\zeta^\vartheta = 1$ означает, что цикл с параметром j_ζ^ϑ набора операторов ϑ является разбиваемым или глобальным не разбиваемым, а $s_\zeta^\vartheta = 0$ – цикл является локальным не разбиваемым. Также определим вектор $d^\vartheta = (M_1^\vartheta - m_1^\vartheta + 1, \dots, M_{n^\vartheta}^\vartheta - m_{n^\vartheta}^\vartheta + 1)$.

Оценка объема памяти, требуемой для выполнения полного тайла. Для набора операторов ϑ сгруппируем функции доступа к памяти массива a_l с одинаковой матрицей доступа $F_{l,\beta,q}$. В такой группе при заданных значениях параметров циклов индексы элементов массива a_l будут отличаться не более чем на константный вектор, который будет выражаться через векторы $f^{l,\beta,q}$ функций доступа. Пусть F^ϑ – множество всех вхождений (l,β,q) всех наборов операторов тайла. Определим семейство $F_l^\vartheta = \{F_{l,1}^\vartheta, \dots, F_{l,k}^\vartheta\}$ как разбиение множества F^ϑ наименьшей мощности, в котором все вхождения (l,β,q) как элементы множества $F_{l,i}^\vartheta$ имеют одинаковую матрицу доступа $F_{l,\beta,q}$. Определим $F_l = \bigcup_\vartheta F_l^\vartheta$. Оценку используемой памяти тайла дает

Теорема. Пусть задано объединение F_l семейств F_l^ϑ множеств вхождений (l,β,q) с одинаковыми матрицами доступа $F_{l,\beta,q}$, вектор r^ϑ размеров тайла и вектор s^ϑ разбиваемых циклов. Тогда число используемых элементов массива a_l размерности v_l в тайле ограничено сверху величиной $\tilde{U}_l$, определяемой равенством

$$\tilde{U}_l = \sum_{F_{l,i}^\vartheta \in F_l} V((F_{l,\beta,q,+} - F_{l,\beta,q,-})(S^\vartheta r^\vartheta + (E^\vartheta - S^\vartheta)d^\vartheta - \overline{1}) +$$

$$+ \max_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^\vartheta} f^{l,\beta,q} - \min_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^\vartheta} f^{l,\beta,q} + \overline{1}), \qquad (2)$$

где (l,β,q) – произвольный элемент множества $F_{l,i}^\vartheta$, $V(x)$ – произведение компонент вектора x, $F_{l,\beta,q,-}$ и $F_{l,\beta,q,+}$ – матрицы, полученные из матрицы $F_{l,\beta,q}$ обнулением положительных и отрицательных элементов соответственно, $S^\vartheta = \mathrm{diag}\, s^\vartheta$, E^ϑ – единичная матрица порядка n^ϑ, $\overline{1} = (1, \dots 1)$.

Доказательство. Определим величины $b_\zeta^{l,\beta,q}(J^{gl}, s^\vartheta)$ и $u_\zeta^{l,\beta,q}(J^{gl}, s^\vartheta)$ – наименьшее и наибольшее соответственно значения координаты ζ индексов элементов массива, к которым получают доступ на вхождении (l,β,q) операции тайла J^{gl}. Будем рассматривать полные тайлы, область итераций которых является многомерным параллелепипедом с длинами сторон $S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}$ (величины $b_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})$ и $u_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})$ для неполного тайла не меньше и не больше соответственно, чем для полного тайла).

Покажем, что для любого вхождения (l,β,q) и некоторого фиксированного J^{gl} выполняются соотношения

$$b^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})=F_{l,\beta,q}(m^{\vartheta}+R^{\vartheta}S^{\vartheta}J^{gl})+$$
$$+F_{l,\beta,q,-}(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})+f^{l,\beta,q}. \tag{3}$$

$$u^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})=F_{l,\beta,q}(m^{\vartheta}+R^{\vartheta}S^{\vartheta}J^{gl})+$$
$$+F_{l,\beta,q,+}(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})+f^{l,\beta,q}. \tag{4}$$

Найдем $b^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})=(b_1^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta}),\ldots,b_{\nu_l}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta}))$ покоординатно. Для компонентов вектора параметров J выполнено:

$$m_{\zeta}^{\vartheta}+r_{\zeta}^{\vartheta}j_{\zeta}^{gl}\le j_{\zeta}^{\vartheta}\le m_{\zeta}^{\vartheta}+r_{\zeta}^{\vartheta}(j_{\zeta}^{gl}+1)-1. \tag{5}$$

Тогда

$$b_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})=\min_{J}\left(\overline{F}_{l,\beta,q}(J)\right)_{\zeta}=\min_{J}\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta}J+f_{\zeta}^{l,\beta,q}=$$
$$=\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta}(m^{\vartheta}+R^{\vartheta}S^{\vartheta}J^{gl})+f_{\zeta}^{l,\beta,q}+\min_{J^{loc}}\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta}J^{loc}, \tag{6}$$

где $0\le J_{\zeta}^{loc}\le(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})_{\zeta}$. Найдем такое значение J^{loc}, когда $\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta}J^{loc}$ принимает наименьшее значение. $J_{\xi}^{loc}=0$, если $\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta\xi}\ge 0$, и $J_{\xi}^{loc}=(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})_{\xi}$ в противном случае. Тогда

$$\min_{J^{loc}}\left(F_{l,\beta,q}\right)_{\zeta}J^{loc}=F_{l,\beta,q,-}(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1}). \tag{7}$$

Для вектора $u^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})$ рассуждение проводится по аналогичной схеме.

Теперь рассмотрим все вхождения (l,β,q) из множества $F_{l,i}^{\vartheta}$ для некоторого набора операторов ϑ. Обозначим

$$B_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})=\min_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}}b_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta}), \tag{8}$$

$$B^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})=(B_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta}),\ldots,B_{v_l}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})), \quad (9)$$

$$U_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})=\max_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}} u_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta}), \quad (10)$$

$$U^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})=(U_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta}),\ldots,U_{v_l}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})). \quad (11)$$

Индексы элементов массива a_l, к которым производится доступ на итерациях тайла J^{gl} по функциям доступа, определяемых вхождениями (l,β,q) из множества $F_{l,i}^{\vartheta}$, принадлежат многомерному параллелепипеду, ограниченному векторами $B^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})$ и $U^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})$. Тогда число используемых элементов массива a_l ограничено сверху $V(U^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})-B^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})+\overline{1})$. Найдем $U^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})-B^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})$.

$$U_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})-B_{\zeta}^{\vartheta,l,i}(J^{gl},s^{\vartheta})=\max_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}} u_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})-\min_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}} b_{\zeta}^{l,\beta,q}(J^{gl},s^{\vartheta})=$$

$$=\max_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}}\left\{F_{l,\beta,q}(m^{\vartheta}+R^{\vartheta}S^{\vartheta}J^{gl})+F_{l,\beta,q,+}(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})+f^{l,\beta,q}\right\}-$$

$$-\min_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}}\left\{F_{l,\beta,q}(m^{\vartheta}+R^{\vartheta}S^{\vartheta}J^{gl})+F_{l,\beta,q,-}(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})+f^{l,\beta,q}\right\}. \quad (12)$$

Заметим, что $F_{l,\beta,q}$ одинаковы для всех $(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}$. Тогда последнее выражение равно

$$(F_{l,\beta,q,+}-F_{l,\beta,q,-})(S^{\vartheta}r^{\vartheta}+(E^{\vartheta}-S^{\vartheta})d^{\vartheta}-\overline{1})+\max_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}} f^{l,\beta,q}-\min_{(l,\beta,q)\in F_{l,i}^{\vartheta}} f^{l,\beta,q}. \quad (13)$$

Суммирование по всем множествам $F_{l,i}^{\vartheta}$ учитывает все использования массива a_l.

Литература

1. *Kandemir M., Ramanujam J., Irwin M., Narayanan V., Kadayi I. f, and Parikh A.* A compiler based approach for dynamically managing scratch-pad memories in embedded systems // IEEE Transactions on Computer-Aided Design, 23(2), 2004. P. 243–260.
2. *Baskaran M., Bondhugula U., Krishnamoorthy S., Ramanujam J., Rountev A., Sadayappan P.* Automatic Data Movement and Computation Mapping for Multi-level Parallel Architectures with Explicitly Managed Memories // ACMSIGPLAN PPoPP, 2008.