общем случае задача нормализации времени работы узлов является трудно разрешимой. Но разницу во времени работы можно сгладить, задав различные приоритеты для узлов. Во время работы конвейера с помощью служебных сообщений замеряется время, затрачиваемое на обработку узлами и ветвями. Эта информация далее передается управляющему узлу; он анализирует ее и определяет оптимальные приоритеты для узлов. Результаты такой подстройки могут использоваться и в дальнейшем: зная оптимальные приоритеты, их можно задавать для узлов сразу же при создании. Таким образом, может быть получена оптимальная конфигурация для определенного конвейера.

Сделаем замечание о построенной модели конвейера. Прежде всего, упор в ней сделан на повторное использование узлов-модулей, частично принося в жертву общую эффективность. Если требуется снизить издержки на служебную передачу данных, имеет смысл объединять в одном узле не только обрабатывающие, но и служебные функции.

Построенная модель может использоваться для применения в численных задачах. Имея несколько готовых модулей, можно построить вычислительную схему, удовлетворяющую данной задаче.

Подведем итоги. Предложенная модель конвейера позволяет организовывать программы со сложными структурными элементами, такими как ветвления и петли. Обратные связи дают возможность реагировать на различные события. Наличие служебных узлов обеспечивает отделение кода обработки данных и кода связи между узлами.

Литература

1. Интернет-адрес: http://msdn.microsoft.com/en-us/library/windows/desktop/aa365782(v=vs.85).aspx.
2. Интернет-адрес: http://msdn.microsoft.com/en-us/library/3x292kth.aspx.
3. *Рихтер Дж.* Windows для профессионалов: создание эффективных Win32-приложений с учетом специфики 64-разрядной версии Windows / Дж. Рихтер. СПб.: Питер, 2004. 749 с.

ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

П. А. Иржавский

1. ВВЕДЕНИЕ

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий все вершины этого графа. К проблеме гамильтоновости графов, а также к ее взвешенному аналогу – задаче о коммивояжере, проявляется устойчивый интерес в течение многих лет, а исследование этих задач представляет собой одно из магистральных направлений теории графов и комбинаторной оптимизации. Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в общем случае [2] и остается NP-полной во многих узких классах графов. С другой стороны, известен ряд достаточных условий, когда эта задача разрешима за полиномиальное время. Исследование «областей эффективности» задачи о гамильтоновом цикле – классов графов, для которых эта задача может быть решена за полиномиальное время,– имеет не только теоретический, но и практический интерес.

Далее под *графом* понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [3]. Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется *порядком* графа G и обозначается $|G|$. *Степень* вершины – число смежных с ней вершин. Наибольшая и наименьшая среди степеней вершин графа G обозначаются $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно.

Как обычно, через K_n, $K_{n,m}$ и $K_{n,m,\ell}$ обозначаются полный граф порядка n, полный двудольный граф с долями размера n и m и полный трехдольный граф с долями размера n, m и ℓ соответственно, а через C_n – простой цикл порядка n.

Простой цикл C графа G называется *расширяемым*, если в графе G существует цикл C^*, для которого $V(C)\subset V(C^*)$ и $|V(C^*)|=|V(C)|+1$. Граф G называется *вполне циклически расширяемым*, если каждый простой негамильтонов цикл в G расширяемый и каждая вершина графа G принадлежит треугольнику. Несложно заметить, что всякий вполне циклически расширяемый граф является гамильтоновым, но обратное, вообще говоря, неверно.

Окружением вершины v в графе G называется множество $N(v)$ всех вершин, смежных с v в графе G. N_2*-окружением* вершины v в графе G называется множество $N_2(v)$ всех ребер, каждое из которых инцидентно хотя бы одной вершине из $N(v)$, но не инцидентно v. Вершина v графа G называется *локально связной*, если подграф, порожденный ее окружением, связен. Граф G называется *локально связным*, если каждая его вершина локально связна. Вершина v графа G называется N_2*-локально связной*, если подграф, образованный ребрами из $N_2(v)$ и инцидентными им вершинами, является связным. Граф G называется N_2*-локально связным*, если каждая его вершина N_2-локально связна. Несложно заметить, что локально связный граф является N_2-локально связным, но обратное, вообще говоря, неверно.

$K_{1,p}$*-свободный граф* – граф не содержащий порожденного подграфа, изоморфного звезде $K_{1,p}$. Граф G называется $K_{1,p}$*-ограниченным* ($p \geq 3$), если для любого (не порожденного) подграфа H, изоморфного $K_{1,p}$, граф G содержит не менее $p + p - 2$ ребер, оба конца которых принадлежат $V(H)$. Граф G называется *почти* $K_{1,3}$*-свободным*, если в нем центры порожденных звезд $K_{1,3}$ попарно не смежны и для каждого такого центра v верно $\gamma(G(N(v))) \leq 2$, где $\gamma(H)$ – число доминирования графа H.

2. ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

Наблюдение 1. *Пусть G – связный граф с $\Delta(G) \leq 2$. Граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда G изоморфен $C_{|G|}$.*

Теорема 1 (Garey, Johnson, Tarjan, 1976, [4])**.** *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна для произвольного планарного 3-регулярного 3-связного графа.*

Из наблюдения 1 и теоремы 1 получаем, что задача о гамильтоновом цикле полиномиально разрешима, если степени всех вершин графа не превосходят 2, и NP-полна, если степени всех его вершин не превосходят 3. Исследуем аналогичный вопрос для локально связных графов. Обозначим Δ^* число, при котором задача о гамильтоновом цикле NP-полна для произвольного локально связного графа G с $\Delta(G) \leq \Delta^*$ и полиномиально разрешима для произвольного локально связного графа G с $\Delta(G) < \Delta^*$.

Гипотеза 1 (Gordon, Orlovich, Potts, Strusevich, 2011, [1])**.** $\Delta^* = 7$.

Также установлена верхняя граница для числа Δ^*.

Теорема 2 (Gordon, Orlovich, Potts, Strusevich, 2011, [1])**.** *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна для произвольного связного локально связного графа G с $\Delta(G) \leq 7$.*

Проследим, какова нижняя граница для числа Δ^*.

Наблюдение 2. *Пусть G – связный локально связный граф с $\Delta(G) \leq 3$. Тогда G изоморфен K_3, K_4 или $K_{1,1,2}$ и, следовательно, G гамильтонов.*

Значит, $\Delta^* \geq 4$. Следующая теорема усиливает эту оценку до 5.

Теорема 3 (Chartrand, Pippert, 1974, [5])**.** *Пусть G – связный локально связный граф с $\Delta(G) \leq 4$. Тогда либо G гамильтонов, либо G изоморфен $K_{1,1,3}$.*

В ходе дальнейших исследований появились ограничения на $\delta(G)$.

Теорема 4 (Hendry, 1990, [6]). *Пусть G – связный локально связный граф с $\Delta(G) \leq 5$ и $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$. Тогда G – вполне циклически расширяемый граф.*

Теорема 5 (Gordon, Orlovich, Potts, Strusevich, 2011, [1]). *Пусть G – связный локально связный граф с $\Delta(G) = 5$ и $\delta(G) \geq 3$. Тогда G – вполне циклически расширяемый граф.*

Тем не менее, убрать ограничение снизу на степени вершин графа невозможно, поскольку задача о гамильтоновом цикле, как показывает следующий результат, становится NP-полной.

Теорема 6. *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна для произвольного связного локально связного планарного графа G с $\Delta(G) \leq 5$.*

Таким образом, $\Delta^* = 5$, что опровергает гипотезу 1.

3. ГРАФЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В [7] получено следующее достаточное условие полной циклической расширяемости графа.

Теорема 7 (Иржавский, Орлович, 2012, [7]). *Пусть G – связный локально связный $K_{1,4}$-ограниченный граф порядка не меньше 3. Тогда либо G – вполне циклически расширяемый граф, либо G изоморфен одному из пяти негамильтоновых графов.*

С одной стороны, эта теорема обобщает ряд полученных ранее результатов. С другой стороны, можно показать, что ее условия являются «хрупкими», т. е. рассматриваемый в этой теореме класс графов не может быть естественным образом расширен без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле.

Наблюдение 3. *При любом $p \geq 3$ всякий $K_{1,p}$-ограниченный граф является $K_{1,p+1}$-ограниченным и $K_{1,p}$-свободным. $K_{1,3}$-свободный граф является $K_{1,3}$-ограниченным.*

Естественным обобщением теоремы 7 представляется расширение класса $K_{1,4}$-ограниченных графов до $K_{1,5}$-ограниченных и/или $K_{1,4}$-свободных графов. С другой стороны, можно заметить следующее:

Наблюдение 4. *Пусть G – связный локально связный граф с $\Delta(G) \leq 5$. Тогда G – $K_{1,5}$-ограниченный граф и либо G – $K_{1,4}$-свободный граф, либо G изоморфен $K_{1,1,4}$.*

Таким образом, из теоремы 6 заключаем:

Следствие 1. *Задача о гамильтоновом цикле остается NP-полной в классе локально связных* $K_{1,4}$*-свободных* $K_{1,5}$*-ограниченных графов.*

Значит, описанное выше расширение класса невозможно без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле. Следующий результат с учетом наблюдения 3 демонстрирует невозможность ослабления другого условия теоремы 7, локальной связности, до N_2-локальной связности.

Теорема 8. *Задача о гамильтоновом цикле остается NP-полной в классе* N_2*-локально связных* $K_{1,3}$*-свободных графов.*

В заключение рассмотрим еще одно достаточное условие полной циклической расширяемости.

Теорема 9 (Ryjáček, 1994, [8]). *Пусть* G *– связный локально связный* $K_{1,4}$*-свободный, почти* $K_{1,3}$*-свободный граф порядка не меньше* 3. *Тогда* G *– вполне циклически расширяемый граф.*

Следующая теорема показывает, что условие принадлежности графа к классу $K_{1,4}$-свободных не может быть опущено.

Теорема 10. *Задача о гамильтоновом цикле остается NP-полной в классе локально связных почти* $K_{1,3}$*-свободных графов.*

Литература

1. *Gordon V. S.* [et al.] Hamiltonian properties of locally connected graphs with bounded vertex degree // Discrete Appl. Math. 2011. V. 159. P. 1759–1774.
2. *Garey M. R.* , *Johnson D. S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness // W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.
3. Лекции по теории графов / *В. А. Емеличев* [и др.]. // М.: Наука, 1990.
4. *Garey M. R.* , *Johnson D. S.* , *Tarjan R. E.* The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete // SIAM J. Comput. 1976. V. 5. P. 704–714.
5. *Chartrand G.* , *Pippert R.* Locally connected graphs // Čas. Pěst. Mat. 1974. V. 99. P. 158–163.
6. *Hendry G. R. T.* A strengthening of Kikust's theorem // J. Graph Theory. 1989. V. 13. P. 257–260.
7. *Иржавский П. А.* , *Орлович Ю. Л.* Полная циклическая расширяемость локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси, 2012. Т. 20, № 2. С. 36–50.
8. *Ryjáček Z.* Almost claw-free graphs // J. Graph Theory. 1994. V. 18. P. 469–477.