О ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ» СО СТУДЕНТАМИ-ЭКОЛОГАМИ

Шмат Л.А.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Учебным планом для специальности «Охрана окружающей среды» по курсу «Высшая математика» за второй семестр первого курса химического факультета предусмотрено практическое занятие на тему «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений». Для мотивации необходимости математических знаний для будущей профессиональной деятельности студента-эколога в процессе изложения каждой темы, необходимо приводить достаточное количество примеров использования данного материала при решении специфических задач. На занятии рассматривается задача о радиоактивном распаде. Сначала рассматривается простое, но весьма важное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое называют уравнением для экспоненты:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad\ k - const\ .$$

Это уравнение означает, что скорость изменения функции $x\ t$ в зависимости от t пропорциональна текущему значению x. Если при этом k >0, то x – возрастающая функция, а если k <0, то x – убывающая функция. Разделив переменные и проинтегрировав данное уравнение, получим

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \ln|x| = kx + \ln|C|, \quad x = C \cdot e^{kt}.$$

Задавая начальное условие $x\ t_0\ = x_0$, получим $C = x_0 \cdot e^{-kt}$. В итоге, решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид

$$x = x_0 \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Далее строится математическая модель. Известно, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Если обозначить через N – число атомов радиоактивного вещества, через t – время, а через k >0 – константу распада, то сформулированное выше свойство радиоактивного вещества можно математически выразить следующим образом: $\frac{dN}{dt} = -kN$.

Затем студентам предлагается решить задачу. Имеется некоторое количество N_0 радиоактивного вещества с константой распада k, подчиняющегося закону распада радиоактивного вещества. Найти время, в течение которого количество вещества уменьшится вдвое, а также среднюю продолжительность существования атома этого вещества.

Решение. Так как процесс радиоактивного распада описывается уравнением $\frac{dN}{dt} = -kN$, то его частное решение с учетом того, что $N\ 0\ = N_0$, будет иметь вид $N = N_0 \cdot e^{-kt}, \quad t_0 = 0\ .$

Для нахождения времени t_1, в течение которого количество исходного вещества N_0 уменьшится вдвое, воспользуемся формулой частного решения: $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-kt}$, откуда $0,5 = e^{-kt_1}$ или $-kt_1 = \ln 0,5$. Значит, $t_1 = \frac{1}{k} \ln 2 = \frac{0,693}{k}$.

Время t_1 называют периодом полураспада.

Для вычисления средней продолжительности существования атома этого вещества следует воспользоваться предыдущими вычислениями:

$$dN = -kN \cdot dt, \quad N = N_0 \cdot e^{-kt}.$$

Тогда количество атомов с продолжительностью существования t будет равно: $dN = -kN_0 \cdot e^{-kt} \cdot dt$. Для поучения средней продолжительности $\overline{t}$ уществования атома, нужно умножить количество атомов dN на время t, в течение которого они существовали, проинтегрировать по t в пределах от 0 до $+\infty$ и разделить на первоначальное количество N_0. $\overline{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^{+\infty} -kN_0 \cdot e^{-kt} \cdot tdt$.

Данный интеграл вычисляется методом интегрирования по частям.

$$\overline{t} = -k \int_0^{+\infty} te^{-kt} dt = \begin{bmatrix} t = u, & v = -\frac{e^{-kt}}{k}; \\ e^{-kt} dt = dv, & dt = du \end{bmatrix} = -k \left[-\frac{te^{-kt}}{k} \Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{k} dt \right] = -\frac{e^{-kt}}{k} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{k}.$$

Среднее время существования атома радиоактивного вещества $\overline{t} = \frac{1}{k}$.

Также указывается, что обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = kx \quad k - const$, описывает не только радиоактивный распад, но и многие другие процессы, которые подчиняются закону: скорость изменения вещества пропорциональна его количеству. Например, процесс размножения бактерий в питательной среде на протяжении некоторого промежуткам времени.

Пусть $n-$ количество бактерий, n_0- начальное количество бактерий, т.е. $n_0 = n\ 0$, тогда $\frac{dn}{dt} = kn$, $n = n_0 e^{k\ t - t_0}$.

Многие реакции первого порядка также описываются уравнением для экспоненты. В данном случае, используется такой современный метод обучения, как построения математических моделей. Он ориентирован, главным образом, на обучение не готовым знаниям, а деятельности, стимулирующей проявление творческой активности студентов. В ходе проведения занятия следует отметить, что новым и наиболее затруднительным для студентов является построение самих математических моделей. Поэтому на занятиях следует начинать с наиболее простых заданий и постепенно усложнять их, по мере освоения материала. Реализация же моделей, при помощи математического аппарата, как правило, не вызывает трудностей. При таком подходе у студентов обычно не возникает вопросов по поводу необходимости изучения той или иной темы. Именно при изучении высшей математики студенты учатся исследовать природные и химические процессы в их изменчивости. Исследовательский, творческий характер математического знания способствует развитию интеллекта.

Литература

1. Скатецкий, В.Г. Математические методы в химии: учебное пособие для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск, 2006. – 368 с.