ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЛОСКИЙ КАНАЛ

М. О. Рудой

Рассматривается плоская задача обтекания стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкостью бесконечной пластинки y=0, x>0, расположенной между плоскостями y=±h, -∞<x<∞ с заданным постоянным расходом 2Q.

В безразмерных переменных с учетом симметрии течения задача имеет следующий вид [1, с. 107–109]:

$$\begin{cases} R\left(\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \\ R\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}=0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где R=Q/υ, Q – заданный расход, υ – коэффициент вязкости жидкости, u(x,y) и v(x,y) – проекции скорости вектора жидкости на оси x и y соответственно, p(x,y) – давление.

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{cases} y=0:\ x>0:\ u(x,0)=v(x,0)=0;\ x<0:\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\ v(x,0)=0 \\ y=1:-\infty<x<\infty:\ \int\limits_0^1 u(x,y)\,dy=1,\ u(x,1)=v(x,1)=0 \end{cases}, \qquad (2)$$

После замены

$$u(x,y)=u_1(x,y)+\frac{3}{2}(1-y^2),\ p(x,y)=p_1(x,y)-3x$$

и введения неизвестной функции

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y},\ x>0 \\ 0,\ x<0 \end{cases}, \qquad (3)$$

применим к уравнениям (1) и граничным условиям (2) двустороннее преобразование Лапласа по x.

Решая полученную задачу для изображения

$$\overline{u_1}(s,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(x,y)e^{-sx}ds$$

Получим

$$\overline{u_1}(s,y)=\frac{\overline{\varphi}(s)}{z(\sin z-z\cos z)}(\cos z(y-1)-z\sin z(y-1)+\cos z-1-\cos zy)=\overline{\varphi}(s)\overline{u_2}(s,y)\ , \quad (4)$$

где $z^2=2s^2$-Rs.

Т.к. $u_1(x,0)=-3/2$, $x>0$, то с учетом условия (3) для неизвестной функции $\overline{\varphi}(s)$ получим парные интегральные уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\overline{u_2}(s,0)\overline{\varphi}(s)e^{sx}ds=-\dfrac{3}{2},\ x>0\ , \\ \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\overline{\varphi}(s)e^{sx}ds=0,\ x<0 \qquad , \end{cases} \quad (5)\text{–}(6)$$

Число $\gamma>0$ должно быть меньше действительной части любой особой точки функции $\overline{u_1}$(s,0), лежащей в полуплоскости Res>0. Функция $\overline{u_2}$(s,0) – четная мероморфная функция z порядка единицы и ее разложение в бесконечное произведение имеет вид [2, с. 287–289]:

$$\overline{u_2}(s,0)=\frac{1}{4}\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-s/s_k)}{(1-s/a_k)}\ , \quad (7)$$

где s_k – нули, a_k – полюсы функции $\overline{u_2}$(s,0).

Функцию $\overline{\varphi}(s)$ будем искать среди мероморфных функций, представимых бесконечным произведением аналогичного вида. Из теоремы Коши о вычетах и из уравнения (6) следует, что $\overline{\varphi}(s)$ не имеет положительных полюсов. Аналогично, из (5) следует, что s=0 – полюс произведения $\overline{\varphi}(s)\times\ \overline{u_2}(s,0)$ с вычетом, равным -3/2, и что это произведение не имеет отрицательных полюсов.

Следовательно, для $\overline{\varphi}(s)$ получим следующее выражение:

$$\overline{\varphi}(s)=-\frac{6}{s}\prod_{-\infty}^{1}\frac{(1-s/a_k)}{(1-s/s_k)}\ , \quad (8)$$

После подстановки функции (8) в (4) и применения обратного преобразования Лапласа найдется функция $u_1(x,y)$, что и завершает решение задачи.

Литература

1. *Савчук В. П.* Вестн. Белорус. ун-та., сер.1, №3, 75. 1975.
2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, том 2. 1968. С. 287–289.