

5. Тимохович В. Л., Фролова Д. С. О некоторых топологиях на множестве отображений, Вестник БГУ. Сер.1, №3, С. 84–89. 2009.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ f -СТРУКТУРЫ НА НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ ИНДЕКСА 2

П. А. Дубовик, В. В. Балащенко

Целью работы является обнаружение семейств метрических левоинвариантных f -структур на нильпотентных группах Ли индекса 2, входящих в классы эрмитовых и приближённо келеровых f -структур. Установлены соотношения на образ, ядро и центр алгебры Ли, при которых метрические левоинвариантные f -структуры являются приближённо келеровыми и эрмитовыми f -структурами. Исследованы свойства метрических левоинвариантных f -структур на обобщённой $2n+1$ -мерной группе Гейзенберга.

Приведём кратко некоторые сведения из обобщённой эрмитовой геометрии относящиеся к метрическим f -структурам на гладких многообразиях. Как известно, аффинорной *структурой* на многообразии называется тензорное поле типа $(1,1)$ или, что эквивалентно, поле эндоморфизмов, действующих в его касательном расслоении. Мы рассматриваем так называемые f -структуры, то есть аффинорные структуры f , которые удовлетворяют равенству: $f^3 + f = 0$ [1]. Такие структуры обобщают широко известные почти комплексные структуры J ($J^2 = -1$). Напомним, что f -структура на римановом многообразии $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *метрической f -структурой*, если $\langle fX, Y \rangle + \langle X, fY \rangle = 0$, где $X, Y \in B(M)$ (см. [2]).

Далее через ∇ будем обозначать связность Леви-Чивита риманова многообразия $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Тогда для f -структуры f имеем:

$$\nabla_X(f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y. \quad (2)$$

Тензор T типа $(2,1)$ на f -многообразии определённый формулой [2]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \quad X, Y \in B(M) \quad (3)$$

называется *композиционным тензором*.

Приведём основные классы метрических f -структур, указав для них определяющие свойства ([2], [3]):

Kf	келерова f -структура:	$\nabla f = 0$;
Hf	эрмитова f -структура:	$T(X, Y) = 0$;
G₁f	f -структура класса G_1 :	$T(X, X) = 0$;
Kill f	киллингова f -структура:	$\nabla_X(f)X = 0$;

NKf приближённо келерова f -структура,
или **NK f** – структура:

$$\nabla_{fX}(f)fX = 0$$

Приведём отношения включения между классами метрических f -структур:

$$Kf = Hf \cap QKf; \quad Kf \subset Hf \subset G_1f; \quad Kf \subset \text{Kill } f \subset NKf \subset G_1f.$$

Группа Ли G называется *нильпотентной* если существует такая последовательность $G = G_n \supset G_{n-1} \supset \dots \supset G_0 = \{e\}$ нормальных делителей G , что G_{k+1}/G_k лежит в центре G/G_k . Если G – нильпотентная группа, то все её подгруппы и фактор-группы также нильпотентны. Существование такой последовательности эквивалентно существованию в алгебре Ли L группы Ли G последовательности идеалов (*убывающий* или *нижний центральный ряд*):

$$L^0 = L, \quad L^1 = [L, L], \quad L^2 = [L, L^1], \quad \dots, \quad L^i = [L, L^{i-1}]$$

таких, что $L^n = 0$ при некотором n . Наименьшее такое n называется *индексом нильпотентности*.

Пусть $(G/H, g)$ – однородное редуктивное пространство группы Ли G с инвариантной римановой метрикой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на G/H , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда связность Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии $(G/H, g)$ определяется формулой [4, с. 187]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y), \quad (4)$$

где $U(X, Y)$ – симметрическое билинейное отображение из $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}$, определённое формулой:

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \quad (5)$$

Пусть G – связная нильпотентная группа Ли индекса 2, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G , $Z(\mathfrak{g})$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартная евклидова метрика на $\mathfrak{g}$. Рассмотрим симметрическое билинейное отображение

$$U(X, Y): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \text{ удовлетворяющее условию (5).}$$

Лемма 1. Для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ $U(X, Y) \perp Z(\mathfrak{g})$ и $U(X, Y) = 0$ при $X, Y \in Z(\mathfrak{g})$.

Утверждение леммы непосредственно следует из формулы (5).

Лемма 2. Для любых $X, Y \in Z(\mathfrak{g})^\perp$ отображение $U(X, Y)$, равно нулю.

Доказательство. Очевидно, для любых $X, Y \in Z(\mathfrak{h})^\perp$ и любого $Z \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство: $\langle X, [Z, Y] \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle = 0$. В силу формулы (5) по-

лучим $\langle U(X, Y), Z \rangle = 0$. Таким образом, вектор $U(X, Y)$ ортогонален любому вектору алгебры $\mathfrak{h}$, а значит $U(X, Y) = 0$. Лемма доказана.

Пусть f – левоинвариантная метрическая f -структура на группе Ли G .

Лемма 3. Пусть $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{Ker } f$. Тогда $U(f(X), f(Y)) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Доказательство леммы следует из леммы 3.2 и того, что образ f -структуры ортогонален ядру.

Лемма 4. Пусть $\text{Im } f \subset Z(\mathfrak{g})$. Тогда $[X, fY] = [fX, Y] = f(U(X, Y)) = 0$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Из того, что $\text{Im } f \subset Z(\mathfrak{g})$ следует $fX, fY \in Z(\mathfrak{g})$ и $[fX, Y] = [X, fY] = 0$. Как упоминалось выше, $U(X, Y) \perp Z(\mathfrak{g})$ и поэтому $U(X, Y) \subset \text{Ker } f$. Лемма доказана.

Доказательство следующей теоремы опирается на леммы 1–4.

Теорема 1. Пусть левоинвариантная метрическая f -структура на нильпотентной группе Ли G индекса два удовлетворяет одному из условий:

- (i) $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{Ker } f$;
- (ii) $\text{Im } f \subset Z(\mathfrak{g})$;

Тогда f является эрмитовой, но не является келеровой f -структурой. При выполнении условия (ii) f является приближённо келеровой f -структурой.

В работе [5] рассматриваются канонические f -структуры на обобщённой 6-мерной группе Гейзенберга (подробно о канонических структурах смотри в [3]). Это нильпотентная группа Ли индекса два. Доказывается, что базовые f -структуры

$$\begin{aligned} f_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &\rightarrow (-x_4, -x_3, x_2, x_1, 0, 0) \\ \text{и } f_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &\rightarrow (0, 0, 0, 0, -x_6, x_5) \end{aligned}$$

где x_i – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обобщённой 6-мерной группы Гейзенберга, являются эрмитовыми. Причём f -структура f_2 является приближённо келеровой f -структурой. Не вдаваясь в подробности данной тематики отметим, что центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ натянут на базисные векторы x_5 и x_6 . Исходя из того как заданы f -структуры f_1 и f_2 можно заключить: $Z(\mathfrak{g}) = \text{Ker } f_1$ и $\text{Im } f_2 = Z(\mathfrak{g})$. На основании теоремы 1 не проводя иных вычислений, можем сделать вывод о принадлежности f -структуры f_1 классу эрмитовых f -структур, а для f -структуры f_2 к классу эрмитовых и приближённо келеровых f -структур. Более того – из теоремы 6 следует, что данные структуры не являются келеровыми f -структурами.

В качестве второго примера рассмотрим обобщённую $2n+1$ -мерную группу Гейзенберга. Это нильпотентная группа Ли индекса два состоящая из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_n & c \\ 0 & E_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где E_n – единичная матрица, $a_n = (a_1, \dots, a_n)$, $b_n = (b_1, \dots, b_n)^T$ и $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ данной группы может быть реализована как $2n+1$ -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел с базисом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$ и скобками Ли: $[x_i, y_i] = z$ для $i = \overline{1, n}$ (остальные скобки равны нулю). Очевидно, что центр $Z(\mathfrak{h})$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$ натянут на вектор z . Пусть φ – автоморфизм порядка k алгебры Ли $\mathfrak{h}$ сохраняющий длины векторов и оставляющий на месте только 0 , а f – каноническая f -структура, построенная по автоморфизму φ . Легко показать, что центр алгебры $\mathfrak{h}$ принадлежит ядру f -структуры f . Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Любая каноническая f -структура на обобщённой $2n+1$ -мерной группе Гейзенберга является эрмитовой и не является келеровой f -структурой.*

Литература

1. Яно К., Кон М. CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М., 1990. С. 192.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщённой эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНТИ АН СССР. 1986. Т.18. С. 25–71.
3. Балащенко В. В., Никонов Ю. Г., Радионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. С. 280.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Москва: Наука, 1981. Т. 2. С. 414.
5. Balashchenko V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac Journal of Mathematics. 2011. Vol. 35. № 2. P. 209–222.