Литература

1. *Савчук В. П.* Вестн. Белорус.ун-та., сер.1, №3, 75, 1975.
2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, том 2, 1968. С. 287–289.

О ТОПОЛОГИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

П. Н. Воробей

Пусть X и Y – произвольные фиксированные топологическое пространство X с топологией τ_X и метризуемое Y соответственно. Обозначим $C(X,Y)$ – множество всех непрерывных отображений из X в Y. Для каждой допустимой (т.е. согласованной с топологией) метрики ρ на Y можно определить на $C(X,Y)$ топологию равномерной сходимости τ_μ, заданную метрикой равномерной сходимости $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$ (допускается $\mu(f,g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на определение топологии). Обозначим $T_U = \{\tau_\mu \mid \mu = \mu(\rho), \rho \in \Omega_Y\}$, где Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y. Семейство T_U можно рассматривать как подсемейство в семействе T всех топологий на $C(X,Y)$, которое является частично упорядоченном по включению с естественной структурой полной решетки [1], т.е. с определенными для любого непустого подсемейства $L \subset T$ точной нижней гранью $\inf L$, и точной верхней гранью $\sup L$ [1]. Таким образом, определена топология $\tau_{\inf} = \inf T_U$, называемая инфимальной, которая изучалась в [2, 3].

В данной работе приводится критерий непрерывной сходимости [4, с. 179] последовательности в $C(X,Y)$ и также получено другое доказательство достаточности теоремы из [3], описывающее топологию $\tau_{\inf}$ с помощью понятия непрерывно сходящейся последовательности·

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

Пусть E – произвольное топологическое пространство с топологией τ, Λ – направленное множество [4, с. 27]. Направленность $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ в E, сходящуюся к точке $x \in E$ в топологии τ [4, с. 88] будем кратко записывать $x_\lambda \xrightarrow[\tau]{} x$.

Обозначим $\hat{\Sigma}$ – класс всех пар вида $\big((x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), x\big)$ (кратко $(x_\lambda, \Lambda; x)$), где $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – направленность в E, $x \in X$. Каждый подкласс $\Sigma \subset \hat{\Sigma}$

(класс сходимости) определяет топологию $\tau(\Sigma)$, состоящую из всех множеств $U \subset E$, для которых из соотношений $(x_\lambda, \Lambda; x) \in \Sigma$ и $x \in U$ следует существование $\lambda_0 \in \Lambda$ такого, что $\{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\} \subset U$. Приведем без доказательства следующее несложное утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\Sigma \subset \hat{\Sigma}$, τ – произвольная топология на множестве E. Соотношение $\tau \leq \tau(\Sigma)$ выполняется тогда и только тогда, когда для любой направленности $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ из $x_\lambda \xrightarrow[\Sigma]{} x$ следует $x_\lambda \xrightarrow[\tau]{} x$.

Направленность $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ в $C(X,Y)$ называют непрерывно сходящейся к $f \in C(X,Y)$ (кратко $f_\lambda \xrightarrow[(c)]{} f$), если при любом выборе $x_0 \in X$ и окрестности V точки $f(x_0)$ можно указать окрестность U точки x_0 и $\lambda_0 \in \Lambda$ так, чтобы $\bigcup\{f_\lambda(U) \mid \lambda \geq \lambda_0\} \subset V$. Обозначим $\Sigma_{SC} = \{(f_n, \mathbf{N}; f) \in \hat{\Sigma} \mid f_n \xrightarrow[(c)]{} f\}$, $\tau_s^* = \tau(\Sigma_{SC})$. Топологическое пространство X называется секвенциальным пространством, если множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда вместо со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы [4, с. 94]. Для произвольного $x \in X$ обозначаем $\tau_X(x) = \{U \in \tau_X \mid x \in U\}$. Семейство α подмножеств X называют дискретным в X, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in \tau_X(x)$, которая пересекается не более чем с одним элементом α. Пространство X названо здесь псевдокомпактным, если любое дискретное в X семейство непустых открытых множеств конечно. Если ρ – метрика на Y, $x \in Y$, то $B(x,\varepsilon) = \{y \in Y \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$.

НЕПРЕРЫВНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ И АССОЦИИРОВАННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Пусть H – пространство сходящихся к нулю последовательностей действительных чисел с метрикой $\rho_H(x,y) = \max_{n \in \mathbf{N}} |x_n - y_n|$, где $x = (x_n \mid n \in \mathbf{N})$, $y = (y_n \mid n \in \mathbf{N})$. Зафиксируем произвольные $\{f_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset C(X,Y)$ и $f \in C(X,Y)$, такие что последовательность $(f_n \mid n \in \mathbf{N})$ сходится к f поточечно. Введем отображения $P_n(x) = \rho(f_n(x), f(x)) : X \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Отметим, что $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = 0$. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 2. Каждое $P_n : X \to \mathbf{R}$ – непрерывное отображение.

Определение. Обозначим P – отображение из множества X в H, ставящее в соответствие точке $x \in X$ сходящуюся к нулю последовательность $(P_n(x)\,|\,n\in\mathbf{N})$. Назовем отображение P *ассоциированным с последовательностью* $(f_n\,|\,n\in\mathbf{N})$ *и отображением* f.

Теорема 1. Последовательность $(f_n\,|\,n\in\mathbf{N})$ сходится к f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно соответствующее ассоциированное отображение P.

*Доказательство***.** Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу непрерывности f и непрерывной сходимости последовательности отображений для любого $x\in X$ выберем такую окрестность $O\in\tau_X(x)$, чтобы для некоторого номера $m\in\mathbf{N}$ выполнялось:

$$f(O)\subset B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ и } f_n(O)\subset B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ для любого } n\ge m, \qquad (1)$$

тогда для любого $y\in O$ из неравенства треугольника $\rho(f_n(y),f(y))\le\rho(f_n(y),f(x))+\rho(f(x),f(y))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ следует неравенство $|P_n(y)-P_n(x)|<\varepsilon$, где $n\ge m$. Далее, для каждого $n\in\{1,2,...,m-1\}$ в силу непрерывности P_n выберем такую окрестность $O_n\in\tau_X(x)$, чтобы для любого $y\in O_n$ выполнялось соотношение

$$|P_n(y)-P_n(x)|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Из (1), (2) следует, что $\rho_H(P(x),P(y))=\max\limits_{n\in\mathbf{N}}|P_n(y)-P_n(x)|<\varepsilon$, т.е. P непрерывно.

Достаточность. Зафиксируем произвольные $x\in X$ и $\varepsilon>0$. В силу сходимости последовательности $P(x)$ существует номер $m\in\mathbf{N}$, для которого $P_n(x)=\rho(f_n(x),f(x))<\varepsilon/4$ при $n\ge m$. Т.к. отображения P и f непрерывны, то можно выбрать окрестность $U\in\tau_X(x)$, такую что $P(U)\subset B(P(x),\varepsilon/2)$ и $f(U)\subset B(f(x),\varepsilon/4)$. Тогда для любого $y\in U$ верно $\rho_H(P(x),P(y))<\varepsilon/2$, значит

$$|P_n(y)-P_n(x)|=|\rho(f_n(y),f(y))-\rho(f_n(x),f(x))|<\varepsilon/2,$$

а следовательно $\rho(f_n(y),f(y))<\varepsilon/2+\rho(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}$, откуда $\rho(f_n(y),f(x))<\rho(f_n(y),f(y))+\rho(f(y),f(x))<\frac{3\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$ при $n\ge m$. Таким образом, последовательность $(f_n\,|\,n\in\mathbf{N})$ сходится непрерывно. Теорема доказана.

Теорема 2. Если X – псевдокомпактное топологическое пространство, то топологии $\tau_{\inf}$ и τ_s^* на множестве отображений $C(X,Y)$ совпадают.

*Доказательство***.** Если X псевдокомпактно, то образ $f(X)$ псевдокомпактен, а в силу метризуемости Y компактен для любого $f \in C(X,Y)$ [4, с. 310]. Тогда все топологии вида τ_μ совпадают [6]. В силу секвенцильности топологий $\tau_{\inf}$ и τ_s^* [3], достаточно показать, что сходимость последовательностей в этих топологиях равносильна [4, с. 94]. Зафиксируем произвольные $\rho \in \Omega_Y$, $(f_n, \mathbf{N}; f) \in \Sigma_{SC}$. Доказательство соотношения $\tau_{\inf} \le \tau_s^*$ не сложное, поэтому опустим его. Согласно утверждению 1, для доказательства соотношения $\tau_{\inf} \ge \tau_s^*$ покажем, что из непрерывной сходимости следует равномерная. От противного, пусть равномерной сходимости $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$, где $\mu = \mu(\rho)$, нет, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $m \in \mathbf{N}$ можно выбрать $n > m$, для которого $\mu(f_n, f) \ge 2\varepsilon$. Пусть $x_1 \in X$ выбрано так, чтобы $\rho(f_{n_1}(x_1), f(x_1)) \ge \varepsilon$. В силу непрерывной сходимости найдутся $U \in \tau_X(x_1)$ и $m \in \mathbf{N}$, такие что $f_l(U) \subset B\big(f(x_1), \varepsilon/2\big)$ для $l \ge m$. Выберем $x_2 \in X$ так, чтобы $\rho(f_{n_2}(x_2), f(x_2)) \ge \varepsilon$, где $n_2 > m$ и $n_2 > n_1$. Продолжая по индукции, получим последовательность $(x_k \mid k \in \mathbf{N})$.

Рассмотрим последовательность $(h_k = P(x_k) \mid k \in \mathbf{N})$ в $P(X) \subset H$, для соответствующего ассоциированного отображения P. Тогда для $l > m$ имеем:

$$\rho_H(h_m, h_l) = \max_{k \in \mathbf{N}} \left| P(x_m) - P(x_l) \right| \ge \left| P_{n_m}(x_m) - P_{n_l}(x_l) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. последовательность $(h_k \mid k \in \mathbf{N})$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. Но по теореме 1 P непрерывно, значит образ $P(X)$ компактен в метрическом пространстве H, что противоречит существованию последовательности $(h_k \mid k \in \mathbf{N})$. Теорема доказана.

Литература.

1. *Birkhoff G.* On the combination of topologies, Fund. Math. 26, P. 156–166. 1936.
2. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* Об инфимальной топологии пространства отображений. Вестник БГУ. Сер.1, №2, С. 136–140. 2011.
3. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* О максимальной секвенциально собственной топологии на множестве отображений. Вестник БГУ, Сер.1, №3 2012.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология Мир, М. 1986.

5. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* О некоторых топологиях на множестве отображений, Вестник БГУ. Сер.1, №3, С. 84–89. 2009.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ F-СТРУКТУРЫ НА НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ ИНДЕКСА 2

П. А. Дубовик, В. В. Балащенко

Целью работы является обнаружение семейств метрических левоинвариантных *f*-структур на нильпотентных группах Ли индекса 2, входящих в классы эрмитовх и приближёно келеровых *f*-структур. Установлены соотношения на образ, ядро и центр алгебры Ли, при которых метрические левоинвариантные *f*-структуры являются приближённо келеровыми и эрмитовыми *f*-структурами. Исследованы свойства метрических левоинвариантных *f*-структур на обобщённой $2n+1$-мерной группе Гейзенберга.

Приведём кратко некоторые сведения из обобщённой эрмитовой геометрии относящиеся к метрическим f-структурам на гладких многообразиях. Как известно, аффинорной *структурой* на многообразии называется тензорное поле типа (1,1) или, что эквивалентно, поле эндоморфизмов, действующих в его касательном расслоении. Мы рассматриваем так называемые f-структуры, то есть аффинорные структуры f, которые удовлетворяют равенству: $f^3 + f = 0$ [1]. Такие структуры обобщают широко известные почти комплексные структуры J ($J^2 = -1$). Напомним, что f-структура на римановом многообразии (M, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$) называется *метрической* *f*-структурой, если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$, где X, $Y \in B(M)$ (см. [2]).

Далее через ∇ будем обозначать связность Леви-Чивита риманова многообразия (M, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$). Тогда для *f*-структуры *f* имеем:

$$\nabla_X(f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y. \tag{2}$$

Тензор T типа (2,1) на *f*-многообразии определённый формулой [2]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \quad X, Y \in \mathbf{B}(\mathrm{M}) \tag{3}$$

называется *композиционным тензором.*

Приведём основные классы метрических *f*-структур, указав для них определяющие свойства ([2], [3]):

Kf	келерова *f*-структура:	$\nabla f = 0$;
Hf	эрмитова *f*-структура:	$T(X, Y)=0$;
$\mathbf{G_1}$**f**	*f*-структура класса G_1:	$T(X, X)=0$;
Kill f	киллингова *f*-структура:	$\nabla_X(f)X = 0$;