$$Fj(x)=\sum_{i=1}^{n} z_i a_i . \qquad (7)$$

Рассмотрена эволюция файловой системы за период времени Т. Для каждого файла в файловой системе в конце периода эволюции можно определить с заданной вероятностью, какие характеристики он будет иметь, оценить стоимость данного файла и в соответствии с этим сделать вывод о необходимости резервного копирования данного файла.

В результате имеется возможность определять суммарную интенсивность потока файлов, подлежащих резервному копированию, т. е. загрузку системы резервного копирования. Интенсивность входящего потока данных оценим как сумму значений функций приспособленности всех файлов, отобранных для резервного копирования. Далее через отношение всех входящих файлов к числу отобранных для резервного копирования можно посчитать нагрузку на систему резервного копирования.

Литература

1. Сайт издательства «Открытые системы». Распределенное тиражирование данных [Электронный ресурс] / Джерри Голик. – Россия, 2000. – Режим доступа: http://www.osp.ru/lan/2000/04/131050/ – Дата доступа: 15.03.2009.

2. *Воройский, Ф. С.* Информатика. Энциклопедический систематизированный словарь-справочник. (Введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах) / Ф С. Воройский. – М., 2007.

3. IBS Системы резервного копирования [Электронный ресурс] / Алексей Лобанов. – Россия, 2000. – Режим доступа: http://si.ibs.ru/content/si/70/708-article.asp – Дата доступа: 16.03.2009.

4. Генетические алгоритмы – математический аппарат [Электронный ресурс] / Алексей Стариков. – Россия, 2000. - Режим доступа: http://www.basegroup.ru/library/optimization/ga_math/ – Дата доступа: 14.03.2009.

5. *Рутковская Д.,* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский; под ред. А. С. Попова. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.

Кобзарь Анастасия Тимуровна, аспирантка кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов, jasya@mail.ru

УДК 519.872

Е. В. Колузаева, М. А. Маталыцкий., С. Э. Статкевич

ПРИМЕНЕНИЕ НМ-СЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ ЗАЯВОК В ОЧЕРЕДЯХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖБАНКОВСКИХ ПЛАТЕЖЕЙ

Рассматривается применение НМ (Howard-Matalytski)-сетей массового обслуживания в качестве стохастической модели системы межбанковских расчетов в случае, когда электронные платежные документы могут быть досрочно отозваны банком-плательщиком из системы.

Введение

Сети массового обслуживания (МО) используются в качестве математических моделей различных объектов в компьютерной технике, экономике, производстве, страховании, медицине. С методами их исследования и применениями можно познакомится, например, в [1], где, в частности, показано, что собой представляют заявки и системы сети (СМО) в различных ситуациях. Понятие НМ (Howard-Matalytski)-сетей впервые было введено в рассмотрение в работах [2–5]. В таких сетях заявка при переходе из одной СМО в другую приносит ей некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается на эту же величину. Подробная библиография работ по НМ-сетям приведена в [6, 7].

Действующая в нашей стране платежная система может быть кратко охарактеризована следующим образом. На верхнем уровне банковской сети находится Национальный (Центральный) банк (ЦБ), ниже - крупные периферийные банки (ПБ) с их филиалами. Межбанковские расчеты производятся Расчетным центром (РЦ) ЦБ с помощью банковской компьютерной сети через корреспондентские счета (КС) банков, открывающиеся на балансе каждого банка. Каждый платеж оформляется в виде одного электронного платежного документа (ЭПД). Платежи бывают двух типов – срочные и несрочные, соответственно ЭПД также делятся на срочные и несрочные. За срочность платежа банк берет деньги с клиента, а как проводить платеж – определяет сам клиент. Прием и обработка срочных ЭПД осуществляются по мере их поступления. При отсутствии (недостаточности) денежных средств на корреспондентском счете банка-отправителя срочные ЭПД помещаются в очередь ожидания средств. Расчеты по несрочным денежным переводам осуществляются с применением на постоянной основе многостороннего взаимозачета и использованием денежных средств, зарезервированных на КС банков. При отсутствии встречных платежей и (или) недостаточности суммы зарезервированных денежных средств несрочные ЭПД помещаются в очередь ожидания средств для обработки в следующем сеансе взаимозачета.

За обработку каждого ЭПД РЦ получает от банка-плательщика определенную сумму. Кроме того, каждый банк в любой момент времени может запросить и получить сведения (справку) из РЦ об ожидаемых поступлениях, т. е. о сумме всех срочных платежей других банков на этот банк, не проведенных по причине недостатка резервов у банков-плательщиков, и о сумме всех несрочных платежей других банков в этот банк, ожидающих начала очередного клирингового сеанса. За изменение величины каждого из резервов и за выдачу справки об ожидаемых поступлениях РЦ также берет определенную сумму.

На проведение ЭПД каждый банк устанавливает денежные резервы, которые уменьшаются на проведенные суммы. Как только банк установил сумму резервов, эти деньги выпадают из оборота банка. Поэтому банк заинтересован в том, чтобы суммы резервов были минимальные.

Каждый банк в течение дня видит состояния очередей своих срочных и несрочных платежей и может в случайный момент времени отозвать ЭПД из очереди ожидания средств по срочным и несрочным денежным переводам при наличии ошибочных реквизитов в ЭПД либо в случае, когда для его проведения нет средств. В этом случае и подобных ему при моделировании доходов могут применяться НМ-сети с разнотипными заявками и ограниченным временем ожидания заявок в очередях, с помощью которых можно найти ожидаемые доходы от переходов между состояниями банковской сети, соответствующих поступлению платежей (заявок) между банками, а также оптимальные резервы банков. Ранее в [9] модель межбанковских платежей была исследована в случае неограниченного времени ожидания заявок в очередях.

Анализ НМ-сети с ограниченным временем пребывания заявок в очередях

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с однотипными заявками, состоящую из n СМО $S_1, S_2, ..., S_n$. Под состояниями сети будем понимать вектор $k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, ..., k_n, t)$, где k_i - число заявок в системе S_i в момент времени t, $t \in [0, +\infty]$, $i = \overline{1,n}$. Для унификации обозначений введем систему S_0 (внешнюю среду), из которой в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Пусть система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в каждой из которых распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_i, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через p_{0i} вероятность поступления заявки из системы S_0 в систему S_i, $\sum_{i=1}^{n} p_{0i} = 1$; p_{ij} - вероятность перехода заявки в СМО S_j после ее обслуживания в СМО S_i, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$. Заявка при переходе из СМО S_i в СМО S_j приносит ей некоторый доход, а доход СМО S_i уменьшается на эту величину, $i, j = \overline{0,n}$. На обслуживание заявки выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO.

Длительность пребывания заявки в очереди i-й СМО является СВ, распределенной по экспоненциальному закону с параметром θ_i, и не зависит от других факторов, например, от времени пребывания в очереди других заявок. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в очередь системы S_j с вероятностью q_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,n}$. Матрицы $P = \|p_{ij}\|_{(n+1)\times n}$ и $Q = \|q_{ij}\|_{n\times(n+1)}$ являются матрицами вероятностей переходов неприводимых марковских цепей.

Введем ряд обозначений для доходов в системе S_i. Пусть:

$v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(k,0)$;

I_i – n-вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1;

$r_i(k)$ – доход системы S_i в у. е. в единицу времени в течение времени пребывания сети в состоянии k;

$-R_{i0}(k-I_i,t)$, $-H_{i0}(k-I_i,t)$ – доходы системы S_i, когда сеть меняет свое состояние из (k,t) на $(k-I_i,t+\Delta t)$ соответственно из-за ухода заявки после обслуживания в этой системе во внешнюю среду и из-за ухода заявки, которая не дождалась обслуживания в ней, из очереди этой системы во внешнюю среду;

$r_{0i}(k+I_i,t)$ – доход системы S_i, когда сеть меняет свое состояние с (k,t) на $(k+I_i,t+\Delta t)$ из-за прихода заявки из внешней среды в эту систему;

$r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$, $h_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ – доходы системы S_i, когда сеть меняет свое состояние с (k,t) на $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ соответственно из-за перехода заявки после обслуживания в системе S_j в эту систему и из-за перехода заявки, не дождавшейся обслуживания в системе S_j, из очереди этой системы в систему S_i.

В течение интервала времени Δt она может остаться в состоянии $(k,t+\Delta t)$ или перейти в состояния $(k-I_i)$, $(k+I_i)$, $(k+I_i-I_j)$, $i,j=\overline{1,n}$. Если она останется в состоянии $(k,t+\Delta t)$, то доход системы S_i будет равен $r_i(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$ за оставшиеся t единиц времени; поскольку сеть экспоненциальная, то вероятность этого события равна

$$1-\left\{\lambda+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j\min(k_j,m_j)u(k_j)+\theta_j\left(k_j-m_j\right)u\left(k_j-m_j\right)\right]\right\}\Delta t+o(\Delta t),$$

где $u(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

За этот же малый промежуток времени Δt сеть может осуществлять переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$ в одном из двух случаев:

- с вероятностью $\mu_i\min(k_i,m_i)u(k_i)p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка успешно обслужится в СМО S_i и перейдет во внешнюю среду; в этом случае доход этой СМО составит $-R_{i0}(k-I_i,t)$ плюс ожидаемый доход $v_i(k-I_i,t)$, который будет ею получен за оставшееся время t, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k-I_i)$, $i=\overline{1,n}$;
- с вероятностью $\theta_i\min(k_i-m_i)u(k_i-m_i)q_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка покинет очередь СМО S_i и перейдет во внешнюю среду; в этом случае ожидаемый доход этой системы составит $-H_{i0}(k-I_i,t)$ плюс $v_i(k-I_i,t)$.

Переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ за время Δt сетью может быть осуществлен с вероятностью $\lambda p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$; ожидаемый доход системы при этом составит $r_{0i}(k+I_i,t)$ плюс $v_i(k+I_i,t)$.

За время Δt сеть может также осуществить переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ в одном из двух случаев:

- с вероятностью $\mu_j\min(k_j,m_j)u(k_j)p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка после обслуживания в СМО S_j перейдет в систему S_i; в данном случае доход этой СМО составит $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ плюс ожидаемый доход $v_i(k+I_i-I_j,t)$, который будет ею получен за оставшееся время t, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k+I_i-I_j)$;
- с вероятностью $\theta_j\min(k_j-m_j)u(k_j-m_j)q_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка покинет очередь СМО S_j и перейдет в систему S_i; в этом случае ожидаемый доход СМО составит $h_{ij}(k+I_i-I_j,t)+v_i(k+I_i-I_j,t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности для условного математического ожидания, для ожидаемого дохода системы S_i можно получить систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ).

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt} = -\left[\lambda + \sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j) + \theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)\right]\right]v_i(k,t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{\lambda p_{0j} v_i(k+I_j,t) + \left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j)p_{j0} + \theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)q_{j0}\right]\times\right.$$

$$\left.\times v_i(k,t)\right\} + \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\mu_i \min(k_i,m_i)u(k_i)p_{ij} + \theta_i \min(k_i - m_i)u(k_i - m_i)q_{ij}\right]v_i(k - I_i + I_j,t) +\right.$$

$$\left.+\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j)p_{ji} + \theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)q_{ji}\right]v_i(k + I_i - I_j,t)\right\} +$$

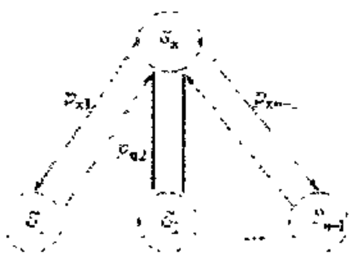
$$+\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}\left[\mu_c \min(k_c,m_c)u(k_c)p_{cs} + \theta_c \min(k_c - m_c)u(k_c - m_c)q_{cs}\right]v_i(k + I_c - I_s,t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j)p_{ji}r_{ij}(k + I_i - I_j,t) - \mu_i \min(k_i,m_i)u(k_i)p_{ij}r_j(k - I_i + I_j,t) +\right.$$

$$+\theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)q_{ji}h_j(k + I_i - I_j,t) + \ (1)$$

$$\left.+\theta_i \min(k_i - m_i)u(k_i - m_i)q_{ij}h_{ji}(k - I_i + I_j,t)\right] + \lambda p_{0i}r_{0i}(k + I_i,t) -$$

$$-\mu_i \min(k_i,m_i)u(k_i)p_{i0}R_{i0}(k - I_i,t) - \theta_i \min(k_i - m_i)u(k_i - m_i)q_{i0}H_{i0}(k - I_i,t) + r_i(k). \qquad (1)$$



Сеть с центральной СМО

Рассмотрим замкнутую сеть с центральной СМО, которая может являться моделью межбанковских платежей (рисунок). Центральная СМО S_n соответствует РЦ ЦБ, а системы S_i, $i=\overline{1,n}$, ПБ. Заявки после обслуживания в периферийной системе S_i поступают в центральную систему S_n и после обслуживания в ней возвращаются обратно с вероятностью p_{ni} в систему S_i, $i=\overline{1,n}$.

В данном случае $\lambda = 0$, матрицы $P = \left\|p_{ij}\right\|_{n\times n}$, $Q = \left\|q_{ij}\right\|_{n\times n}$ имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ & & \dots & & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn-1} & 0 \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ & & \dots & & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому из (1) для центральной СМО S_n имеем:

$$\frac{dv_n(k,t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j) + \theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)\right]v_n(k,t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_n \min(k_n,m_n)u(k_n)p_{nj} + \theta_n \min(k_n - m_n)u(k_n - m_n)q_{nj}\right]v_n(k - I_n + I_j,t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j) + \theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)\right]v_n(k - I_j + I_n,t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_j \min(k_j,m_j)u(k_j)r_{nj}(k - I_j + I_n,t) - \mu_n \min(k_n,m_n)u(k_n)p_{nj}r_{jn}(k + I_j - I_n,t) +\right.$$

$$+\theta_j \min(k_j - m_j)u(k_j - m_j)h_{nj}(k - I_j + I_n,t) +$$

$$\left.+\theta_n \min(k_n - m_n)u(k_n - m_n)q_{nj}h_{jn}(k + I_j - I_n,t)\right] + r_n(k). \qquad (2)$$

Аналогично можно получить систему РДУ для ожидаемых доходов периферийных СМО.

Системы уравнений вида (1), (2) для замкнутых сетей можно свести к системам линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами, которые в матричной форме могут быть записаны в виде

$$\frac{dD_i(t)}{dt} = AD_i(t) + Q_i(t), \tag{3}$$

где $D_i^T(t) = (v_i(1,t), v_i(2,t), ..., v_i(l,t))$ искомый вектор доходов системы S_i, l число состояний сети. Решение системы (3) можно найти, используя прямой метод:

$$D_i(t) = e^{At} D_i(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Q_i(\tau) d\tau \tag{4}$$

или метод преобразований Лапласа: $D_i(t) = W(t) * Q_i(t) + H(t) D_i(0)$, где $W(t)$, $H(t)$ обратные преобразования Лапласа соответственно матриц $\frac{1}{s}(sI - A)^{-1}$ и $(sI - A)^{-1}$, $W(t) * Q_i(t) = \int_0^t W(u) Q_i(t-u) du$. Но число состояний замкнутой сети МО равно $l = C_{n+K-1}^{n-1}$, где K – число заявок в сети, т. е. l является достаточно большим даже при относительно небольших n и K, поэтому число уравнений в системах (1), (2) также будет достаточно большим. Как показал опыт, такими методами можно находить ожидаемые доходы систем сетей с относительно небольшим пространством состояний ($l < 100$). Прямым методом (4) это можно сделать для сетей большей размерности, чем методом преобразований Лапласа [8].

Литература

1. *Маталыцкий, М. А.* Теория массового обслуживания и ее применения / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, А. В. Паньков. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 771 с.

2. *Matalytski, M.* Application of operational calculus for the investigation of the banking networks models / M. Matalytski, A. Pankov // Queues: flows, systems, networks. Vol. 17. Proceedings of 17th Intern. Conf. «Modern Mathematical Methods Of Analysis and Optimization of Telecommunication Networks». Journal, 2003, Minsk : BSU, 2003. – P. 172–177.

3. *Matalytski, M.* Incomes probabilistic model of the banking network / M. Matalytski, A. Pankov // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science of Czestochowa University of Technology. – 2003. – Vol. 1, № 2. P. 99–104.

4. *Matalytski, M.* Analysis of the stochastic model of the changing of incomes in the open banking network / M. Matalytski, A. Pankov // Computer Science. – 2003. – Vol. 3, № 5. – P. 19–29.

5. *Маталыцкий, М. А.* Вероятностный анализ доходов в банковских сетях / М. А. Маталыцкий, А. В. Паньков // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика. – 2004. – № 2. – С. 86–91.

6. *Маталыцкий, М. А.* О методах анализа и применении НМ-сетей массового обслуживания / М. А. Маталыцкий, Е. В. Колузаева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 564–566.

7. *Маталыцкий, М. А.* О некоторых задачах анализа и оптимизации НМ-сетей и их применении / М. А. Маталыцкий // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Сборник научных статей международной научной конференции. – Минск : БГУ, 2008. – С. 201–208.

8. *Маталыцкий, М. А.* О прогнозировании доходов в замкнутой марковской сети с центральной системой / М. А. Маталыцкий, А. В. Паньков // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т.13, вып. 1. – С. 123–125.

9. *Маталыцкий, М. А.* Применение НМ-сети с двумя типами заявок при моделировании межбанковских платежей / М. А. Маталыцкий, А. А. Карпук, Е. В. Колузаева // Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей: материалы междунар. науч. конф. – Минск, 2009. – С. 151–157.

Колузаева Екатерина Владимировна, аспирантка кафедры стохастического анализа и эконометрии Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, koluzaeva@gmail.com

Маталыцкий Михаил Алексеевич, зав. кафедрой стохастического анализа и эконометрии Гродненского государственного университета имени Янки Купалы; доктор физико-математических наук, профессор, m.matalytski@gmail.com

Статкевич Святослав Эдуардович, старший преподаватель кафедры стохастического анализа и эконометрии Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, sstat@grsu.by