Литература

1. *Кастеллани, К.* Автоматизация решения задач управления / К. Кастеллани. – М. : Мир, 1982. – 472 с.
2. *Железко, Б. А.* Теория и практика построения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений / Б. А. Железко, А. Н. Шрозевич. – Минск : Армита-Маркетинг, Менеджмент, 1999. – 144 с.
3. *Бабарика, Н. Н.* Концепция и реализация многофункционального редактора отчетов / Н. Н. Бабарика, А. В. Никитин // Весн. ГрДУ. – Сер. 2. – 2004. – № 1. – С. 100- 105.
4. *Ковязин, А. Н.* Мир InterBase / А. Н. Ковязин, С. М. Востриков. – М. : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 492 с.

Иванов Евгений Евгеньевич, доцент кафедры теоретической физики физико-технического факультета Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат физико-математических наук, доцент, e.ivanov@grsu.by

УДК 519.1

Я. А. Исаченко

О НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГРАНЯХ МНОГОГРАННИКА ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Рассматривается многогранник циклических перестановок. Вводится понятие наследуемых граней. Исследуются гиперграни многогранника циклических перестановок, наследуемые у перестановочного многогранника.

Введение

Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ – множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1<a_2<\ldots<a_n$, $b_1<b_2<\ldots<b_n$. Многочисленный класс задач дискретной математики составляют экстремальные задачи на множествах перестановок:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} b_i \to \min\ (\max),\ \ \pi \in P_n . \tag{1}$$

Здесь P_n – некоторое множество перестановок из n первых натуральных чисел.

Если удается описать выпуклую оболочку $M(P_n)=conv\{a(\pi)=(a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\ldots,a_{\pi(n)}) \mid \pi\in P_n\}$, то задача (1) сводится к задаче линейного программирования [1]. Частичное описание выпуклой оболочки дает возможность построения релаксационной задачи или последовательности релаксационных задач в виде задач линейного программирования. Поэтому вызывают интерес многогранники, задаваемые множествами перестановок. Для множества всех перестановок S_n n первых натуральных чисел N известно [2], что размерность перестановочного многогранника $\dim M(S_n) = n-1$, любая точка $a(\pi)$, $\pi\in S_n$ является его вершиной, а задающая его полная неприводимая система имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$
$$\sum_{i\in\omega} x_i \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j ,\ \forall \omega \subset N, |\omega| \leq n-1 . \tag{2}$$

Пусть $\pi\in S_n$. Если $\pi(i)=i$, то говорим, что число i образует в перестановке цикл длины 1. Будем говорить, что множество чисел $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq N$, $2\leq k\leq n$ образуют в перестановке π цикл длины k, если: 1) множества $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ и $\{\pi(i_1),\pi(i_2),\ldots,\pi(i_k)\}$ совпадают; 2) $\pi^s(i_1)\neq i_1$ для любого s, $1\leq s\leq k-1$; 3) $\pi^k(i_1)=i_1$.

Заметим, что свойство 3) будет иметь место для любого числа, входящего в цикл.

Любая перестановка π представляет собой совокупность некоторого числа p, $1\le p\le n$, циклов, суммарная длина которых равна n. При этом перестановку будем называть p-циклической. Если $p=n$, то $\pi(i)=i$, $i\in N$, и мы имеем так называемую тождественную перестановку.

Если $p=1$, то перестановку будем называть просто циклической. Множество всех циклических перестановок n первых натуральных чисел обозначим через C_n.

В работе [3] введен в рассмотрение многогранник циклических перестановок $M(C_n)$ и показано, что: 1) при $n\ge 4$ $dimM(C_n)=n-1$; 2) множество вершин $vertM(C_n)=\{a(\pi)|\ \pi\in C_n\}$; 3) каждая гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)}x_i=\sum_{i=1}^{n} c_i a_i+(a_n-a_{n-1})(a_2-a_1),\quad \forall\pi\in\begin{cases}(\{1,3,\ldots,2k-1\},\{2,4,\ldots,2k\}),\ n=2k,\\(\{1,3,\ldots,2k+1\},\{2,4,\ldots,2k\}),\ n=2k+1,\end{cases}$$

определяет грань максимальной размерности (гипергрань) многогранника $M(C_n)$. Здесь $c_1=a_n$, $c_2=a_{n-1}$, $c_i=c_{i-1}-(a_n-a_{n-1})(a_2-a_1)/(a_i-a_{i-1})$, $i=\overline{3,n}$; 4) для числа гиперграней $fM(C_n)$ многогранника $M(C_n)$ справедливо неравенство

$$f(M(C_n))\ge\begin{cases}((k-1)!)^2,\ n=2k,\\(k-1)!k!,\ n=2k+1.\end{cases}$$

Наследование граней

Пусть M_1, M_2 – многогранники размерности $d>2$, причем $vertM_1\subset vertM_2$, а G есть m-мерная грань многогранника M_1 ($1\le m<d$). Назовем G наследуемой гранью (относительно многогранника M_2), если существует грань F многогранника M_2 такая, что $dimG=dimF$ и $vertG\subseteq vertF$. Грань F назовем исходной для G. Ясно, что наследуемая грань определяется любой гиперплоскостью, определяющей исходную грань.

Поскольку для перестановочного многогранника и многогранника циклических перестановок выполняются соотношения $dimM(C_n)=dimM(S_n)$, $vertM(C_n)\subseteq vertM(S_n)$, то возникает вопрос: какие из гиперграней перестановочного многогранника наследуются многогранником циклических перестановок? Или эквивалентно: какие из неравенств системы (2) входят в полную неприводимую систему, задающую многогранник $M(C_n)$?

Часть из неравенств заведомо не могут входить в искомую систему. Так, при $\omega=\{1,2,\ldots,k\}$, $1\le k\le n-1$, для гиперплоскости

$$H(\omega)=\{x\in E^n\,|\,\sum_{i\in\omega}x_i=\sum_{i=1}^{k}a_i\}$$

имеем $H(\omega)\cap M(C_n)=\varnothing$, поскольку для любой точки $a(\pi)$, $\pi\in C_n$, получим

$$\sum_{i=1}^{|\omega|}a_{\pi(i)}>\sum_{j=1}^{k}a_j\,.$$

Теорема. При $n>4$ каждая гиперплоскость

$$H(i)=\{x\in E^n|\ x_i=a_1\},\ i\in\{2,3,\ldots,n\}\tag{3}$$

определяет гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Доказательство. Согласно определению множество называется k-мерным, если оно содержит $k+1$ афинно-независимых точек. Поскольку $dimM(C_n)=n-1$, то для доказательства теоремы для гиперплоскости, входящей в (3), необходимо указать $n-1$ афинно-независимые точки многогранника $M(C_n)$, принадлежащие ей.

Проведем доказательство для $i=2$. Рассмотрим следующее множество $n-1$ точек многогранника $M(C_n)$, удовлетворяющих равенству $x_2=a_1$,

$(a_3,\ a_1,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ldots,a_{n-1},a_n,\ a_2)$
$(a_4,\ a_1,\ a_5,\ a_3,\ a_6,\ a_7,\ldots,a_{n-1},a_n,\ a_2)$
$(a_5,\ a_1,\ a_4,\ a_6,\ a_3,\ a_7,\ldots,a_{n-1},a_n,\ a_2)$
$(a_6,\ a_1,\ a_2,\ a_5,\ a_7,\ a_3,\ldots,a_{n-1},a_n,\ a_2)$
....
$(a_{n-1},a_1,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ldots,\ a_n,\ a_3,\ a_2)$
$(a_n,\ a_1,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ldots,a_{n-1},\ a_2,\ a_3)$
$(a_4,\ a_1,\ a_2,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ldots,a_{n-1},\ a_n,\ a_3)$

Рассмотрим $(n-2) \times n$-матрицу, составленную из строк, представляющих собой разность указанных выше векторов, начиная со второго, с первым вектором. Это матрица будет иметь строки

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_4-a_3 & 0 & a_5-a_4 & a_3-a_5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
a_5-a_3 & 0 & 0 & a_6-a_5 & a_3-a_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
a_6-a_3 & 0 & 0 & 0 & a_7-a_6 & a_3-a_7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & & & \\
a_{n-1}-a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-a_{n-1} & a_3-a_n & 0 \\
a_n-a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2-a_n & a_3-a_2 \\
a_4-a_3 & 0 & a_2-a_4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3-a_2
\end{array}
$$

Поставим последнюю строку на первое место и рассмотрим $(n-2)\times(n-2)$ – подматрицу, образованную столбцами, начиная с третьего

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_2-a_4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3-a_2 \\
a_5-a_4 & a_3-a_5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_6-a_5 & a_3-a_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_7-a_6 & a_3-a_7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-a_{n-1} & a_3-a_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2\ a_4 & a_3-a_2
\end{array}
$$

Вычислим определитель полученной матрицы, для чего разложим его по элементам последней строки. Первое слагаемое в разложении, соответствующее элементу a_3-a_2 будет равно

$(a_3-a_2)(a_3-a_n)(a_3-a_{n-1})\dots(a_3-a_5)(a_2-a_4)=\alpha$.

Второе слагаемое, соответствующее элементу (a_2-a_4) равно

$-(a_2-a_4)(a_3-a_2)(a_n-a_{n-1})\dots(a_6-a_5)(a_5-a_4)=\beta$.

Для $|\alpha|-|\beta|$, учитывая неравенства $a_1<a_2<\dots<a_n$, получим

$(a_2-a_4)(a_3-a_2)[(a_3-a_5)(a_3-a_6)\dots(a_3-a_{n-1})(a_3-a_n) - (a_4-a_5)(a_5-a_6)\dots(a_{n-2}-a_{n-1})(a_{n-1}-a_n)] > 0$.

Следовательно, искомый определитель отличен от нуля. Последнее означает, что рассматриваемое множество $n-1$ точек многогранника $M(C_n)$ является афинно-независимым.

Пусть $3\le i\le n-2$. Возьмем множество $n-1$ точек многогранника $M(C_n)$, удовлетворяющих равенству $x_i=a_1$.

$(a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$(a_3, a_4, a_2, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$(a_4, a_3, a_5, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$\dots$
$(a_{i-2}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-1}, a_2, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$(a_{i-1}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i+1}, a_2, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$(a_{i+1}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+2}, a_1, a_2, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$(a_{i+2}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+3}, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_i)$
$\dots$
$(a_{n-2}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-1}, a_2, a_n, a_i)$
$(a_{n-1}, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_n, a_2, a_i)$
$(a_n, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_i, a_2)$
$(a_3, a_4, a_2, a_5, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, a_n, a_i, a_{n-1})$

Вычитая первый вектор из остальных, сформируем $(n-2) \times n$-матрицу со строками

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
a_3-a_2, & a_4-a_3, & a_2-a_4, & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
a_4-a_2, & 0 & a_5-a_4 & a_2-a_5 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & & & & \\
a_{i-1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & a_{i+1}-a_{i-1} & a_2-a_{i+1} & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
a_{i+1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & a_{i+2}-a_{i+1} & 0 & a_2-a_{i+2} & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
a_{i+2}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+3}-a_{i+2} & a_2-a_{i+2} & \dots 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & & & & \\
a_{n-1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots a_n-a_{n-1} & a_2-a_n & 0 \\
a_n-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & a_i-a_n & a_2-a_i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots a_n-a_{n-1} & a_i-a_n & a_{n-1}-a_i
\end{array}
$$

Вычтем $n-4$ строку из последней строки. Получим матрицу

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
a_3-a_2, & a_4-a_3, & a_2-a_4, & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
a_4-a_2, & 0 & a_5-a_4 & a_2-a_5 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & & & & \\
a_{i-1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & a_{i+1}-a_{i-1} & a_2-a_{i+1} & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
a_{i+1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & a_{i+2}-a_{i+1} & 0 & a_2-a_{i+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
a_{i+2}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+3}-a_{i+2} & a_2-a_{i+2} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\
\ldots\ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
a_{n-1}-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n-a_{n-1} & a_2-a_n & 0 & \\
a_n-a_2 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_i-a_n & a_2-a_i & \\
a_2-a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_i-a_2 & a_{n-1}-a_i &
\end{array}
$$

Рассмотрим $(n-2)\times(n-2)$ – подматрицу, образованную не нулевыми столбцами, за исключением первого.

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
a_4-a_3, & a_2-a_4, & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_5-a_4 & a_2-a_5 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ldots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & a_{i+1}-a_{i-1} & a_2-a_{i+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & a_{i+2}-a_{i+1} & a_2-a_{i+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & a_{i+3}-a_{i+2} & a_2-a_{i+2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots\ldots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n-a_{n-1} & a_2-a_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_i-a_n & a_2-a_i \\
0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_i-a_2 & a_{n-1}-a_i
\end{array}
$$

Ее определитель будет равен $(a_4-a_3)(a_5-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})[(a_i-a_n)(a_{n-1}-a_i)-(a_2-a_i)^2]\neq 0$. Следовательно, взятое множество $n-1$ точек многогранника $M(C_n)$, удовлетворяющих равенству $x_i=a_1$, является афинно-независимым.

Для $i=n-1$ в качестве искомого множества $n-1$ афинно-независимых точек многогранника $M(C_n)$, удовлетворяющих равенству $x_{n-1}=a_1$, возьмем множество

$(a_2,\ a_3,\ a_4, a_5, \ldots, a_{n-2},\ a_n,\ \ a_1, a_{n-1})$
$(a_3,\ a_4,\ a_2, a_5, \ldots, a_{n-2},\ a_n,\ \ a_1, a_{n-1})$
$(a_4,\ a_3,\ a_5, a_2, \ldots, a_{n-2},\ a_n,\ \ a_1, a_{n-1})$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(a_{n-2}, a_3,\ a_4, a_5, \ldots, a_n,\ \ a_2,\ \ a_1, a_{n-1})$
$(a_n,\ a_3,\ a_4, a_5, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1},\ a_1,\ a_2)$
$(a_2,\ a_3,\ a_4, a_5, \ldots, a_n,\ a_{n-1},\ a_1, a_{n-2})$

Наконец, для $i=n$ в качестве искомого множества $n-1$ афинно-независимых точек многогранника $M(C_n)$, удовлетворяющих равенству $x_n=a_1$, возьмем множество

$(a_2,\ a_3, a_4,\ a_5, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n,\ a_1)$
$(a_3,\ a_4, a_2,\ a_5, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n,\ a_1)$
$(a_4,\ a_3, a_5,\ a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n,\ a_1)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(a_{n-2}, a_3, a_4,\ a_5, \ldots, a_{n-1},\ a_2,\ a_n,\ a_1)$
$(a_{n-1}, a_3, a_4,\ a_5, \ldots, a_{n-2},\ a_n,\ a_2,\ a_1)$
$(a_2,\ a_3, a_4,\ a_5, \ldots, a_{n-1},\ a_n, a_{n-2}, a_1)$

Доказательство афинной независимости указанных множеств точек проводится по аналогии с предыдущим случаем.

Следствие. Каждая гипергрань $H(i)\cap M(C_n)$, $i\in\{2,3,\ldots,n\}$, $n>4$, циклического перестановочного многогранника $M(C_n)$ является наследуемой относительно перестановочного многогранника $M(S_n)$.

Литература

1. *Schrijver, A.* Theory of linear and integer programming / A. Schrijver. – Wiley, 1999. – 471 p.
2. *Емеличев, В. А.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 344 с.
3. *Исаченко, Я. А.* Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках / Я. А. Исаченко. Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. Ч. 2. – Гродно : ГрГУ, 2008. – С. 192–195.

Исаченко Ярослав Александрович, аспирант кафедры дискретной математики и алгоритмики Белорусского государственного университета, yarais@mail.ru