УДК 519.213.2 + 519.216

А.В. КУЗЬМИНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА – ПРОЦЕССА

Белорусский государственный университет

Дисперсионный гамма - процесс (variance gamma process) является трехпараметрическим процессом и относится к классу процессов Леви. Этот процесс применяется в финансовой математике для описания динамики цен акций в вероятностно - стохастических моделях определения стоимостей опционов.

Мадан Д.Б. и Сенета Е. ввели в рассмотрение симметричный дисперсионный гамма - процесс (параметр $\theta = 0$) в 1990 году [1]. Мадан Д.Б., Карр П.П. и Чанг Е.С. вывели формулу для определения стоимости европейского опциона - колл в случае, когда изменение цены акции задается трехпараметрическим дисперсионным гамма - процессом [1]. Формулы для вычисления стоимости американского опциона, барьерного американского опциона и барьерного европейского опциона в случае, когда изменение цены акции задается дисперсионным гамма - процессом, приведены в [2],[3].

В работе дается определение дисперсионного гамма - процесса, два способа его представления, исследуются некоторые свойства этого процесса. В статье также приводятся алгоритмы моделирования дисперсионного гамма - процесса, реализация которых осуществляется в системе MATLAB® 7.6.0 (R2008a).

Определение 1. Случайная величина γ имеет Г-распределение (гамма-распределение) с параметрами формы $a > 0$, масштаба $b > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f_\gamma(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a\text{-}1} \exp(-bx), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

а $\Gamma(\mathrm{x}) = \int\limits_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz$, $x > 0$ – гамма - функция. В этом случае будем обозначать $\gamma \sim \Gamma(a,b)$.

Определение 2. Случайный процесс $G = (G_t)_{t \ge 0}$ с параметрами $a > 0$, $b > 0$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется гамма - процессом, если выполнены следующие условия:

1) $G_0 \overset{п.н.}{=} 0$;

2) G имеет независимые приращения: для любого $n \ge 1$ и любого набора точек $t_j \in [0, \infty)$, $j = \overline{0,n}$ таких, что $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$, величины $G_{t_0}, G_{t_1} - G_{t_0}, ..., G_{t_n} - G_{t_{n-1}}$ являются независимыми;

3) для любых $s \ge 0, t \ge 0$ G имеет стационарные с гамма - распределением приращения с параметрами $at > 0, b > 0$, то есть

$$G_{s+t} - G_s \overset{d}{=} G_t - G_0 \sim \Gamma(at, b),$$

где $\overset{d}{=}$ обозначает равенство по распределению.

Определение 3. Случайная величина ϑ имеет дисперсионное гамма-распределение с параметрами $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\vartheta}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{y^{\frac{1}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} dg, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

где $\Gamma(x)$, $x > 0$ – гамма-функция, а $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$.
Случайную величину ϑ с дисперсионным гамма - распределением будем обозначать $\vartheta \sim V(\sigma, \nu, \theta)$.

Определение 4. Случайный процесс $V = (V_t)_{t \ge 0}$ с параметрами $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется дисперсионным гамма - процессом, если выполнены следующие условия:

1) $V_0 \overset{п.н.}{=} 0$;
2) V имеет независимые приращения: для любого $n \ge 1$ и любого набора точек $t_j \in [0, \infty)$ $j = \overline{0, n}$ таких, что $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, величины $V_{t_0}, V_{t_1} - V_{t_0}, \ldots, V_{t_n} - V_{t_{n-1}}$ являются независимыми;
3) для любых $s \ge 0, t \ge 0$ V имеет стационарные с дисперсионным гамма - распределением приращения с параметрами $\sigma\sqrt{t} > 0, \nu / t > 0, t\theta > 0$, то есть
$$V_{t+s} - V_s \overset{d}{=} V_t - V_0 \sim V(\sigma\sqrt{t}, \nu / t, t\theta).$$

Дисперсионный гамма - процесс $V = (V_t)_{t \ge 0}$ можно определить двумя способами [1], [4].
Первый состоит в использовании стандартного винеровского процесса $W = (W_t)_{t \ge 0}$ и гамма - процесса $G = (G_t)_{t \ge 0}$ с параметрами $a = 1/\nu$ и $b = 1/\nu$, а именно

$$V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t},$$

где $W = (W_{G_t})_{t \ge 0}$ – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени G_t, $G = (G_t)_{t \ge 0}$ – гамма - процесс, $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Характеристическая функция дисперсионного гамма - процесса имеет вид:

$$\phi_{V_t}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\nu\theta u + (\sigma^2\nu/2)u^2}\right)^{\frac{t}{\nu}}. \tag{3}$$

Доказательство. В силу рекуррентного правила для математических ожиданий [5] $E[X] = E[E[X \mid Y]]$ характеристическую функцию дисперсионного гамма - процесса можно представить как

$$\phi_{V_t}(u) = E\left[\exp(iuV_t)\right] = E\left[E\left[\exp\left(iuV_{G_t}\right) \middle| G_t\right]\right]$$

$$= E\left[E\left[\exp\left(iu\left(\theta G_t + \sigma W_{G_t}\right)\right) \middle| G_t\right]\right]$$

$$= E\left[\exp\left(iu\theta - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)G_t\right],$$

где $G = (G_t)_{t\geq 0}$ – гамма - процесс, $W = \left(W_{G_t}\right)_{t\geq 0}$ – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени G_t.

Таким образом, имеем

$$\phi_{V_t}(u) = E\left[\exp\left(iu\theta - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)G_t\right] = \int_0^\infty \exp\left(iu\theta g - \frac{u^2\sigma^2}{2}g\right)f_{G_t}(g)dg,$$

где $f_{G_t}(g) = \left(\dfrac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \dfrac{g^{\frac{t}{\nu}-1} e^{-\frac{1}{\nu}g}}{\Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)}$.

Подставляя $f_{G_t}(g)$ в выражение для $\phi_{V_t}(u)$ и производя замену переменных $z = g\left(-iu\theta + \dfrac{u^2\sigma^2}{2} + \dfrac{1}{\nu}\right)$, получаем (3). Теорема доказана.

Моменты дисперсионного гамма - процесса $V = (V_t)_{t\geq 0}$ с параметрами $\sigma, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ приведены в таблице 1 [1].

Таблица 1

математическое ожидание	θt
дисперсия	$(\sigma^2 + \nu\theta^2)t$
асимметрия	$\theta\nu\left(3\sigma^2 + 2\nu\theta^2\right)/t^{1/2}\left(\sigma^2 + \nu\theta^2\right)^{3/2}$
эксцесс	$3\left(1 + 2\nu/t - \nu\theta^4 t\left(\sigma^2 + \nu\theta^2\right)^{-2}\right)$

Второй способ определения дисперсионного гамма - процесса заключается в представлении $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t\geq 0}$ как разности двух независимых гамма - процессов $G^1 = \left(G_t^1\right)_{t\geq 0}$ с параметрами a, b_1 и $G^2 = \left(G_t^2\right)_{t\geq 0}$ с параметрами a, b_2, то есть

$$\bar{V}_t = G_t^1 - G_t^2.$$

Теорема 2. Параметры a, b_1, b_2 *дисперсионного гамма - процесса* $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t\geq 0}$ *связаны с параметрами* $\sigma, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ *дисперсионного гамма - процесса* $V = (V_t)_{t\geq 0}$ *следующими соотношениями*

$$a = 1/\nu > 0,$$

$$b_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\nu} + \frac{1}{2}\theta\nu\right)^{-1} > 0, \tag{4}$$

$$b_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2 \nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 \nu} - \frac{1}{2}\theta\nu \right)^{-1} > 0.$$

Доказательство. В силу независимости гамма - процессов $G^1 = \left(G_t^1\right)_{t \ge 0}$, $G^2 = \left(G_t^2\right)_{t \ge 0}$ характеристическая функция дисперсионного гамма - процесса $\overline{V} = \left(\overline{V}_t\right)_{t \ge 0}$ представима в виде произведения характеристических функций гамма - процессов $G^i = \left(G_t^i\right)_{t \ge 0}, i = 1,2$

$$\phi_{V_t}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\frac{u}{b_2}} \right)^{at} \left(\frac{1}{1 + i\frac{u}{b_1}} \right)^{at}, \tag{5}$$

где

$$\phi_{G_t^1}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\frac{u}{b_1}} \right)^{at}, \ \phi_{G_t^2}(u) = \left(\frac{1}{1 + i\frac{u}{b_2}} \right)^{at}.$$

Из (3) и (5) получаем следующие соотношения

$$\begin{gathered} a = 1/\nu, \\ \frac{1}{b_1 b_2} = \frac{\sigma^2 \nu}{2}, \\ \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} = \theta\nu. \end{gathered} \tag{6}$$

Решая (6) относительно b_1 и b_2 получаем (4). Теорема доказана.

Моменты дисперсионного гамма - процесса $\overline{V} = \left(\overline{V}_t\right)_{t \ge 0}$ с параметрами a, b_1, b_2 приведены в таблице 2.

Таблица 2

математическое ожидание	$at(b_2 - b_1)/(b_1 b_2)$
дисперсия	$at\left(b_2^2 + b_1^2\right)/\left(b_1 b_2\right)^2$
асимметрия	$2(at)^{-1/2}\left(b_2^3 - b_1^3\right)/\left(b_2^2 + b_1^2\right)^{3/2}$
эксцесс	$3\left(1 + 2(at)^{-1}\left(b_2^4 + b_1^4\right)/\left(b_2^2 + b_1^2\right)^2\right)$

Существует несколько способов моделирования дисперсионного гамма - процесса [4], [6]. Приведем алгоритмы моделирования дисперсионного гамма - процесса используемые в данной работе.

Алгоритм 1.

1) Генерируем гамма - процесс $G = (G_t)_{t\geq 0}$ с параметрами $a = 1/\nu$ и $b = 1/\nu$.
2) Генерируем стандартное броуновское движение $W = (W_t)_{t\geq 0}$.
   а. Генерируем стандартные нормально распределенные $N(0,1)$ случайные числа $\{v_t, t = 1,2,...\}$.
   б. Полагаем $W_0 = 0$.
   в. $W_t = W_{t-1} + \sqrt{G_t - G_{t-1}}v_t$, $t \geq 1$.
3) Дисперсионный гамма - процесс $V = (V_t)_{t\geq 0}$ с параметрами $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$ моделируем как

$$V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}.$$

Алгоритм 2.

1) Генерируем гамма - процесс $G^1 = (G_t^1)_{t\geq 0}$ с параметрами $a > 0, b_1 > 0$.
2) Генерируем гамма - процесс $G^2 = (G_t^2)_{t\geq 0}$ с параметрами $a > 0, b_2 > 0$.
3) Дисперсионный гамма - процесс $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t\geq 0}$ с параметрами $a > 0, b_1 > 0$, $b_2 > 0$ получаем как

$$\bar{V}_t = G_t^1 - G_t^2.$$

На рисунках 1, 2 представлены траектории дисперсионных гамма - процессов, моделирование которых осуществляется алгоритмами 1 и 2 соответственно.

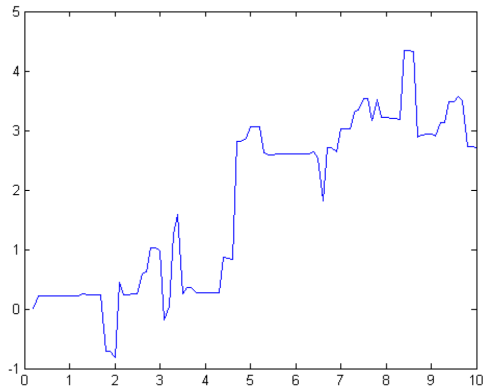

Рисунок 1.Траектория дисперсионного гамма - процесса с параметрами $\sigma = 2, \nu = 1, \theta = 1$

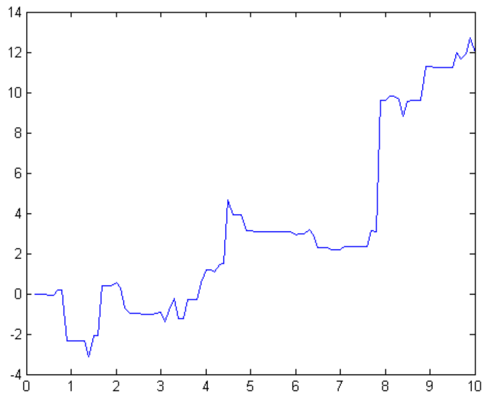

Рисунок 2. Траектория дисперсионного гамма - процесса с параметрами $a = 1, b_1 = 0,5, b_2 = 1$

Литература.

1. Madan D.B., Carr P.P., Chang E.C. // European Finance Preview 1998. Vol. 2. P. 79-105.
2. Hirsa A., Madan D.B. // Journal of Computational Finance. 2003. Vol. 7(2). P. 63-80.
3. Fiorani F. // Thesis Universita degli Studi di Trieste. 2004.
4. Schoutens W. Levy processes in finance. Wiley. 2003. P.109-111.
5. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков. Часть 2. Риски страхования. Мн.: БГУ. 2001. С. 25.

6. Cont R., Tankov P. Financial modeling with jump processes. Chapman and Hall CRC Press. 2003. P.192.

A.V. KUZMINA

VARIANCE GAMMA PROCESS SIMULATION

Summary

This paper presents the variance gamma process definition and some properties of this process. The two ways of the variance gamma process simulation are considered.