СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ ВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Т. В. Цеховая

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: Tsekhavaya@bsu.by

Построена оценка взаимной вариограммы действительного r – мерного внутренне стационарного гауссовского случайного процесса с непрерывным временем. Найдены выражения для первых двух моментов исследуемой статистики. При условии, что ряд из взаимных вариограмм абсолютно сходится, исследовано асимптотическое поведение ковариации и дисперсии оценки взаимной вариограммы.

Ключевые слова: временной ряд, гауссовский случайный процесс, внутренняя стационарность, взаимная вариограмма, оценка.

Изучению одномерных стационарных случайных процессов посвящена обширная литература. Например, построение и исследование оценок ковариационных функций, спектральных плотностей проводились в работах [1, 2]. Статистический анализ оценок вариограмм сделан N. Cressie в монографии [3], Т.В. Цеховой в статьях [4, 5].

Во многих практических задачах часто приходится иметь дело с многомерными стационарными случайными процессами. Исследованию различных аспектов анализа таких процессов посвящены работы Д. Бриллинджера [6], Н.Н. Труша [7], где рассматриваются вопросы построения и изучения оценок взаимных ковариационных функций, взаимных спектральных плотностей.

В данной работе для многомерного внутренне стационарного гауссовского случайного процесса строится оценка взаимной вариограммы. Находятся выражения для первых двух моментов построенной статистики, исследуется асимптотическое поведение ковариации и дисперсии.

Приведем без доказательства некоторый вспомогательный результат.

Лемма 1 [8]. Пусть X, Y – случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $\rho(X,Y) = \operatorname{cov}\{X,Y\} \big/ \sqrt{D\{X\}D\{Y\}} = \rho$. Тогда коэффициент корреляции $\rho(X^2,Y^2) = \rho^2$.

Пусть $Y^r(s) = \{Y_a(s),\ a = \overline{1,r}\}$, $s \in R$, $r \ge 1$, – действительный r – мерный внутренне стационарный случайный процесс с постоянным математическим ожиданием $MY_a(s) = m$, $a = \overline{1,r}$, и взаимной семивариограммой [3]

$$\gamma_{ab}(h) = 0{,}5D\{Y_a(s+h) - Y_b(s)\}, \quad a,b = \overline{1,r},\ s,h \in R .$$

Найдем ковариацию приращений процесса $Y^r(s)$, $s \in R$. Рассмотрим сначала случай приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$, $Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)$, a_1, a_2, $b_1 = \overline{1,r}$, $s_i \in R$, $i = \overline{1,3}$, имеющих одну общую точку.

Лемма 2. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3)$, $s_1 \le s_2 \le s_3$, внутренне стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s\in R$, имеет вид:

$$\operatorname{cov}\{Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2), Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3)\} = \gamma_{a_1a_2}(s_1-s_3)-\gamma_{a_1b_1}(s_1-s_2)-\gamma_{b_1a_2}(s_2-s_3),$$

где $s_i \in R, i=\overline{1,3}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s\in R$, – взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s\in R$, a, b, a_1, a_2, $b_1 = \overline{1,r}$.

Доказательство. Из свойств математического ожидания, принимая во внимание равенство $MY_a(s) = m$, $a=\overline{1,r}$, $s\in R$, имеем

$$D[Y_{a_1}(s_1)-Y_{a_2}(s_3)] = D[(Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2))+(Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3))] =$$

$$= D[Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2)] + D[Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3)] + 2M[(Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3))].$$

Используя определение взаимной вариограммы, получаем требуемое. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольные приращения $Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2)$, $Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4)$, $s_i \in R, i=\overline{1,4}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1,r}$, процесса $Y^r(s)$, $s\in R$.

Лемма 3. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4)$, $s_1\le s_2\le s_3\le s_4$, действительного r – мерного внутренне стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s\in R$, удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{cov}\{Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2), Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4)\} = \gamma_{b_1a_2}(s_2-s_3)+\gamma_{a_1b_2}(s_1-s_4)-\gamma_{b_1b_2}(s_2-s_4)-\gamma_{a_1a_2}(s_1-s_3),$$

где $s_i \in R$, $i=\overline{1,4}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s\in R$, – взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s\in R$, a, b, a_1, a_2, b_1, $b_2 = \overline{1,r}$.

Доказательство. Легко видеть, что для любых фиксированных $a_1, b_2 = \overline{1,r}$,

$$(Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3)) + (Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4)) = (Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_2}(s_4)).$$

Найдем дисперсию обеих частей последнего равенства. Используя определение взаимной вариограммы, запишем

$$\gamma_{a_1b_1}(s_1-s_2)+\gamma_{b_1a_2}(s_2-s_3)+\gamma_{a_2b_2}(s_3-s_4)+M[(Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3))] +$$

$$+M[(Y_{a_1}(s_1)-Y_{b_1}(s_2))(Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4))] + M[(Y_{b_1}(s_2)-Y_{a_2}(s_3))(Y_{a_2}(s_3)-Y_{b_2}(s_4))] =$$

$$=\gamma_{a_1b_2}(s_1-s_4).$$

Учитывая утверждение леммы 2, получаем требуемый результат.

Рассмотрим далее действительный r – мерный внутренне стационарный гауссовский случайный процесс $X^r(s)=\{X_a(s), a=\overline{1,r}\}$, $s\in R$, $r\ge 1$, с нулевым математическим ожиданием $MX_a(s) = m_a = 0$, $a=\overline{1,r}$, $s\in R$, дисперсией σ^2 и неизвестной взаимной вариограммой

$$2\gamma_{ab}(h) = D\{X_a(s+h) - X_b(s)\},\ a, b = \overline{1,r},\ s, h \in R.$$

Заметим, что $\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h)\cdot \chi_1^2$, где χ_1^2 – случайная величина, распределенная по закону *хи*-квадрат с одной степенью свободы. Легко показать, что

$$M\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h),$$

$$D\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\{2\gamma_{ab}(h)\}^2. \tag{1}$$

Используя определение коэффициента корреляции, утверждения лемм 1 и 3, имеем

$$\rho(\{X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t)\}^2,\{X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s)\}^2)=$$

$$=\{\rho(X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t),X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s))\}^2=$$

$$=\left\{\frac{\gamma_{a_1b_2}(t+h_1-s)+\gamma_{b_1a_2}(t-s-h_2)-\gamma_{a_1a_2}(t+h_1-s-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(t-s)}{\sqrt{2\gamma_{a_1b_1}(h_1)}\sqrt{2\gamma_{a_2b_2}(h_2)}}\right\}^2. \tag{2}$$

Пусть $X_a(1)$, $X_a(2)$,..., $X_a(n)$ – n последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(s)$, $a=\overline{1,r}$, $s\in R$, процесса $X^r(s)$, $s\in R$. В качестве оценки взаимной вариограммы рассмотрим статистику вида

$$2\tilde{\gamma}_{ab}(h)=\frac{1}{n-h}\sum_{s=1}^{n-h}\left(X_a(s+h)-X_b(s)\right)^2, \tag{3}$$

$h=\overline{0,n-1}$, a, $b=\overline{1,r}$. Положим $\tilde{\gamma}_{ab}(-h)=\tilde{\gamma}_{ba}(h)$, $h=\overline{0,n-1}$, и $\tilde{\gamma}_{ab}(h)=0$ для $|h|\geq n$.

Найдем выражения для первых двух моментов оценки (3).

Теорема 1. Для оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h=\overline{0,n-1}$, $a,b=\overline{1,r}$, заданной равенством (3), имеют место следующие соотношения:

$$M\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\}=2\gamma_{ab}(h),$$

$$\operatorname{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1),2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\}=\frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)}\times \tag{4}$$

$$\times\sum_{t=1}^{n-h_1}\sum_{s=1}^{n-h_2}\left\{\gamma_{a_1b_2}(t+h_1-s)+\gamma_{b_1a_2}(t-s-h_2)-\gamma_{a_1a_2}(t+h_1-s-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(t-s)\right\}^2,$$

$$D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\}=\frac{2}{(n-h)^2}\sum_{t,s=1}^{n-h}\left\{\gamma_{ab}(t+h-s)+\gamma_{ba}(t-s-h)-\gamma_{aa}(t-s)-\gamma_{bb}(t-s)\right\}^2, \tag{5}$$

где $\gamma_{ab}(h)$, $a,b=\overline{1,r}$, $h\in R$, – взаимная семивариограмма процесса $X^r(s)$, $s\in R$, a_1, a_2, b_1, $b_2=\overline{1,r}$, $h,h_1,h_2=\overline{0,n-1}$.

Доказательство. Из определения взаимной вариограммы и свойств математического ожидания, первое утверждение теоремы вытекает очевидным образом.

Используя определение ковариации, подставляя вместо $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ ее выражение в явном виде, получим

$$\operatorname{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1),2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\}=$$

$$=\frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{t=1}^{n-h_1}\sum_{s=1}^{n-h_2}\operatorname{cov}\{(X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t))^2,(X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s))^2\}.$$

Учитывая определение коэффициента корреляции, запишем

$$\operatorname{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1),2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\}=\frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)}\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{n-h_1}\sum_{s=1}^{n-h_2}\rho\{(X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t))^2,(X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s))^2\}\times$$

$$\times\sqrt{D(X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t))^2}\sqrt{D(X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s))^2}.$$

Применяя соотношение (1), утверждение леммы 1, имеем

$$\mathrm{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \frac{2\{2\gamma_{a_1b_1}(h_1)\}\{2\gamma_{a_2b_2}(h_2)\}}{(n-h_1)(n-h_2)}\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{n-h_1}\sum_{s=1}^{n-h_2}\{\rho(X_{a_1}(t+h_1)-X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2)-X_{b_2}(s))\}^2.$$

Из (2) следует требуемое равенство (4) для ковариации

$$\mathrm{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \frac{2\{2\gamma_{a_1b_1}(h_1)\}\{2\gamma_{a_2b_2}(h_2)\}}{(n-h_1)(n-h_2)}\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{n-h_1}\sum_{s=1}^{n-h_2}\left\{\frac{\gamma_{a_1b_2}(t+h_1-s)+\gamma_{b_1a_2}(t-s-h_2)-\gamma_{a_1a_2}(t+h_1-s-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(t-s)}{\sqrt{2\gamma_{a_1b_1}(h_1)}\sqrt{2\gamma_{a_2b_2}(h_2)}}\right\}^2.$$

Соотношение (5) для дисперсии оценки взаимной вариограммы нетрудно получить из (4), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$. Теорема доказана.

Исследуем асимптотическое поведение моментов второго порядка построенной оценки взаимной вариограмма $2\tilde{\gamma}_{ab}(h),\ h=\overline{0,n-1},\ a,b=\overline{1,r}$.

Теорема 2. Если имеет место соотношение

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|\gamma_{ab}(h)|<\infty, \tag{6}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}(n-\min\{h_1,h_2\})\,\mathrm{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1),2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} =$$

$$= 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2)+\gamma_{a_1b_2}(m+h_1)-\gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(m)\}^2, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-h)D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\{\gamma_{ba}(m-h)+\gamma_{ab}(m+h)-\gamma_{aa}(m)-\gamma_{bb}(m)\}^2, \tag{8}$$

где $\gamma_{ab}(h),\ a,b=\overline{1,r},\ h\in R,$ – взаимная семивариограмма процесса $X^r(s)$, $s\in R$, a_1, a_2, b_1, $b_2 = \overline{1,r}$, $h, h_1, h_2 = \overline{0,n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (4). Пусть $h_1 < h_2$. Сделаем замену переменных: $t=t$, $t–s=m$, тогда

$$\mathrm{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)}\times$$

$$\times\Bigg[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{0}\sum_{t=1}^{m+n-h_2}\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2)+\gamma_{a_1b_2}(m+h_1)-\gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(m)\}^2+$$

$$+\sum_{m=1}^{h_2-h_1}\sum_{t=m+1}^{m+n-h_2}\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2)+\gamma_{a_1b_2}(m+h_1)-\gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(m)\}^2+$$

$$+\sum_{m=h_2-h_1+1}^{n-h_1-1}\sum_{t=m+1}^{n-h_1}\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2)+\gamma_{a_1b_2}(m+h_1)-\gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2)-\gamma_{b_1b_2}(m)\}^2\Bigg]=$$

$$= \frac{2}{n-h_1} \sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\right\}^2 -$$

$$- \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{m=1}^{n-h_2-1} m\Big[\left\{\gamma_{a_2b_1}(m+h_2) + \gamma_{b_2a_1}(m-h_1) - \gamma_{a_2a_1}(m-h_1+h_2) - \gamma_{b_2b_1}(m)\right\}^2 +$$

$$+ \left\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_1) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_2) - \gamma_{a_1a_2}(m) - \gamma_{b_1b_2}(m+h_2-h_1)\right\}^2\Big].$$

Аналогично рассуждаем для случая $h_1 > h_2$.

$$\mathrm{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} =$$

$$= \frac{2}{n-h_2}\Bigg[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\right\}^2 -$$

$$- \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{m=1}^{n-h_1-1} m\Big[\left\{\gamma_{a_2b_1}(m+h_1) + \gamma_{b_2a_1}(m-h_2) - \gamma_{a_2a_1}(m) - \gamma_{b_2b_1}(m-h_1+h_2)\right\}^2 +$$

$$+ \left\{\gamma_{b_1a_2}(m-h_1) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_2) - \gamma_{a_1a_2}(m) - \gamma_{b_1b_2}(m+h_2-h_1)\right\}^2\Big].$$

Объединяя полученные результаты, учитывая (6), вытекает требуемое предельное соотношение (7) для ковариации.

Равенство (8) для дисперсии оценки взаимной вариограммы $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ нетрудно получить из (7), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$.

Следствие. Из теоремы 2 вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 0$, $a,b = \overline{1,r}$, $h = \overline{0,n-1}$.

В силу первого утверждения теоремы 1 и вышеуказанного следствия получаем, что $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0,n-1}$, $a,b = \overline{1,r}$, является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для взаимной вариограммы $2\gamma_{ab}(h)$, $a,b = \overline{1,r}$, $h \in R$.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Бендат Дж., Пирсол А*. Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол. М.:Мир, 1983. 312с.

2.*Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл. М.: Мир, 1990. 584 с.

3.*Cressie N.* Statistics for Spatial Data / N. Cressie. New York: Wiley. 1991. 900 p.

4.*Цеховая Т.В.* Предельное распределение оценки вариограммы стационарного случайного процесса / Т.В. Цеховая // Вестник БГУ. Серия физ.-мат, №1. 2002. С. 104-105.

5.*Tsekhavaya T.V.* Limiting Distribution of the Variogram Estimator / T.V. Tsekhavaya // Computer Data Analysis and Modeling. Complex Stochastic Data and Systems: Proceedings of the Eighth International Conference. Minsk, 2007. V.1. P.229-232.

6.*Бриллинджер Д.* Временные ряды / Д. Бриллинджер. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с.

7.*Труш Н.Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н.Труш. Мн.: Белгосуниверситет, 1999. 218 с.

8.*Цеховая Т.В.* Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса / Т.В. Цеховая // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: Материалы межд. мат. конф. Брест, 2005. С. 78-82.