

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ ВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Т. В. Цеховая

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: Tsekhavaya@bsu.by

Построена оценка взаимной вариограммы многомерного стационарного гауссовского случайного процесса с непрерывным временем. Найдены выражения для первых двух моментов и смешанных семиинвариантов высших порядков исследуемой статистики. При условии, что ряд из взаимных семивариограмм абсолютно сходится, исследовано асимптотическое поведение ковариации, дисперсии и смешанных семиинвариантов высших порядков оценки взаимной вариограммы. Найдено предельное распределение изучаемой статистики.

Ключевые слова: случайный процесс, многомерный случайный процесс, стационарный случайный процесс, вариограмма, взаимная вариограмма, оценка.

В настоящее время вариограмма является одной из важнейших статистических характеристик при анализе временных рядов (случайных процессов), встречающихся в различных областях человеческой деятельности. Поэтому проблема построения и изучения ее оценок весьма актуальна. Например, исследованию статистических свойств оценок вариограммы одномерных случайных процессов посвящены работы [1-4].

При решении многих прикладных задач исследователи пытаются свести изучение исходных данных к теории нормальных случайных процессов. Это связано с тем, что вышеуказанная теория разработана наиболее полно. Заметим также, что гауссовские случайные процессы принадлежат классу внутренне стационарных случайных процессов, которые адекватно описывают многие математические модели в геологии, экологии, эпидемиологии и т.д.

В данной статье строится оценка взаимной вариограммы многомерного гауссовского случайного процесса. Находятся выражения для математического ожидания, дисперсии, ковариационной функции и смешанных семиинвариантов высших порядков изучаемой статистики, исследуется их асимптотическое поведение. Находится предельное распределение построенной оценка взаимной вариограммы.

Приведем некоторый вспомогательный результат.

Лемма 1. Пусть X_1, X_2 – случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции

$$\text{corr}(X_1, X_2) = \text{cov}\{X_1, X_2\} / \sqrt{D\{X_1\}D\{X_2\}} = \rho.$$

Тогда коэффициент корреляции

$$\text{corr}(X_1^2, X_2^2) = \rho^2.$$

Доказательство. Поскольку $MX_i = 0$, то $DX_i = MX_i^2 = \sigma^2$, $i = 1, 2$.

Учитывая связывающее соотношение смешанных моментов со смешанными семинвариантами гауссовских случайных величин, получим

$$MX_1^2 X_2^2 = 2(MX_1 X_2)^2 + DX_1 DX_2 = DX_1 DX_2 (2\rho^2 + 1) = \sigma^4 (2\rho^2 + 1).$$

Далее найдем

$$DX_i^2 = MX_i^4 - (MX_i^2)^2 = 2\sigma^4, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\rho(X_1^2, X_2^2) = \frac{\text{cov}\{X_1^2, X_2^2\}}{\sqrt{DX_1^2} \sqrt{DX_2^2}} = \frac{\sigma^4 (2\rho^2 + 1) - \sigma^4}{2\sigma^4} = \rho^2,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты.

Пусть $Y^r(s) = \{Y_a(s), a = \overline{1, r}\}$, $s \in R$, $r \geq 1$, – действительный r – мерный внутренне стационарный случайный процесс с постоянным математическим ожиданием $MY_a(s) = m$, $a = \overline{1, r}$, и взаимной семивариограммой [1]

$$\gamma_{ab}(h) = 0,5D\{Y_a(s+h) - Y_b(s)\}, \quad a, b = \overline{1, r}, \quad s, h \in R.$$

Найдем ковариацию приращений процесса $Y^r(s)$, $s \in R$. Рассмотрим сначала случай двух приращений

$$Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), \quad Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3),$$

$s_i \in R$, $i = \overline{1, 3}$, $a_1, a_2, b_1 = \overline{1, r}$, имеющих одну общую точку.

Лемма 2. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)$ внутренне стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, имеет вид:

$$\text{cov}\{Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)\} = \gamma_{a_1 a_2}(s_1 - s_3) - \gamma_{a_1 b_1}(s_1 - s_2) - \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3),$$

где $s_i \in R$, $i = \overline{1, 3}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s \in R$, – взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, $a, b, a_1, a_2, b_1 = \overline{1, r}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)) = (Y_{a_1}(s_1) - Y_{a_2}(s_3)).$$

Найдем дисперсию обеих частей последнего соотношения. Из свойств математического ожидания, принимая во внимание равенство $MY_a(s) = m$, $a = \overline{1, r}$, $s \in R$, имеем

$$\begin{aligned} D[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))] &= D[Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)] + D[Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)] + \\ &+ 2M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))] = D[Y_{a_1}(s_1) - Y_{a_2}(s_3)]. \end{aligned}$$

Используя определение взаимной вариограммы, получаем требуемое. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольные приращения

$$Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), \quad Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4),$$

$s_i \in R$, $i = \overline{1, 4}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$, процесса $Y^r(s)$, $s \in R$.

Лемма 3. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)$ действительно r – мерного внутренне стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)\} = \\ & = \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3) + \gamma_{a_1 b_2}(s_1 - s_4) - \gamma_{b_1 b_2}(s_2 - s_4) - \gamma_{a_1 a_2}(s_1 - s_3), \end{aligned}$$

где $s_i \in R$, $i = \overline{1, 4}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s \in R$, – взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)) + (Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)) = (Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_2}(s_4)).$$

Найдем дисперсию обеих частей последнего равенства. Используя определение взаимной вариограммы, запишем

$$\begin{aligned} & \gamma_{a_1 b_1}(s_1 - s_2) + \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3) + \gamma_{a_2 b_2}(s_3 - s_4) + M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))] + \\ & + M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4))] + M[(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))(Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4))] = \\ & = \gamma_{a_1 b_2}(s_1 - s_4). \end{aligned}$$

Учитывая утверждение леммы 2, получаем требуемый результат.

Рассмотрим далее действительный r – мерный стационарный гауссовский случайный процесс $X^r(s) = \{X_a(s), a = \overline{1, r}\}$, $s \in R$, $r \geq 1$, с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 , неизвестными взаимной вариограммой $2\gamma_{ab}(h) = D\{X_a(s+h) - X_b(s)\}$ и взаимной ковариационной функцией $R_{ab}(h) = M\{X_a(s+h)X_b(s)\}$, $a, b = \overline{1, r}$, $s, h \in R$.

Заметим, что

$$\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h) \cdot \chi_1^2,$$

где χ_1^2 – случайная величина, распределенная по закону хи-квадрат с одной степенью свободы. Легко показать, что

$$M\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h),$$

$$D\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\{2\gamma_{ab}(h)\}^2.$$

Используя определение коэффициента корреляции, утверждение леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} & \text{corr}(\{X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t)\}^2, \{X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s)\}^2) = \\ & = \{\text{corr}(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))\}^2 = \\ & = \left(\frac{\text{cov}\{X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s)\}}{\sqrt{D(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))} \sqrt{D(X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))}} \right)^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание утверждение леммы 3 и определение взаимной вариограммы, правую часть последнего равенства запишем в виде

$$\left\{ \frac{\gamma_{a_1 b_2}(t+h_1-s) + \gamma_{b_1 a_2}(t-s-h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(t+h_1-s-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(t-s)}{\sqrt{2\gamma_{a_1 b_1}(h_1)} \sqrt{2\gamma_{a_2 b_2}(h_2)}} \right\}^2.$$

Пусть $X_a(1), X_a(2), \dots, X_a(n)$ – n последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(s)$, $a = \overline{1, r}$, $s \in R$, процесса $X^r(s)$, $s \in R$. В качестве оценки взаимной вариограммы рассмотрим статистику вида

$$2\tilde{\gamma}_{ab}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X_a(s+h) - X_b(s))^2, \quad (1)$$

$h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$.

Положим $\tilde{\gamma}_{ab}(-h) = \tilde{\gamma}_{ba}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, и $\tilde{\gamma}_{ab}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Найдем выражения для первых двух моментов оценки (1).

Теорема 1. Для оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, заданной равенством (1), имеют место следующие соотношения:

$$M\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 2\gamma_{ab}(h),$$

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \{ \gamma_{a_1b_2}(t+h_1-s) + \gamma_{b_1a_2}(t-s-h_2) - \gamma_{a_1a_2}(t+h_1-s-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(t-s) \}^2, \\ D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} &= \frac{2 \sum_{t,s=1}^{n-h} \{ \gamma_{ab}(t+h-s) + \gamma_{ba}(t-s-h) - \gamma_{aa}(t-s) - \gamma_{bb}(t-s) \}^2}{(n-h)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h \in R$, — взаимная семивариограмма процесса $X^r(s)$, $s \in R$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$.

Доказательство. Из определения взаимной вариограммы и свойств математического ожидания, первое утверждение теоремы вытекает очевидным образом.

Используя определение ковариации, подставляя вместо $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ ее выражение в явном виде, в силу леммы 1, запишем

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \\ &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \text{cov}\{(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2, (X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2\} = \\ &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \text{corr}\{(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2, (X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2\} \times \\ & \quad \times \sqrt{D(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2} \sqrt{D(X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2} = \\ &= \frac{2\{2\gamma_{a_1b_1}(h_1)\}\{2\gamma_{a_2b_2}(h_2)\}}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \{\text{corr}(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))\}^2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, имеем требуемое равенство (2) для ковариации.

Соотношение (3) для дисперсии оценки взаимной вариограммы (1) нетрудно получить из (2), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что статистика (1) является несмещенной оценкой для взаимной вариограммы $2\gamma_{ab}(h)$.

Исследуем асимптотическое поведение моментов второго порядка построенной оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h = \overline{0, n-1}$.

Теорема 2. Если имеет место соотношение

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma_{ab}(h)| < \infty, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \min\{h_1, h_2\}) \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \\ & = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - h) D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\gamma_{ba}(m - h) + \gamma_{ab}(m + h) - \gamma_{aa}(m) - \gamma_{bb}(m)\}^2, \quad (6)$$

где $\gamma_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h \in R$, – взаимная семивариограмма процесса $X^r(s)$, $s \in R$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (2). Пусть $h_1 > h_2$. Сделаем замену переменных: $t=t$, $-s=m$, тогда

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \frac{2}{(n - h_1)(n - h_2)} \times \\ & \times \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{h_2-h_1-1} \sum_{t=1}^{m+n-h_2} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \right. \\ & + \sum_{m=h_2-h_1}^0 \sum_{t=1}^{n-h_1} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \\ & \left. + \sum_{m=1}^{n-h_1-1} \sum_{t=m+1}^{n-h_1} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 \right] = \\ & = \frac{2}{n - h_2} \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \right. \\ & + \frac{1}{n - h_1} \sum_{m=-(n-h_2-1)}^{h_2-h_1-1} (h_1 + m - h_2) \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 - \\ & \left. - \frac{1}{n - h_1} \sum_{m=1}^{n-h_1-1} m \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом выражения, стоящего в квадратных скобках, сделаем замену переменных: $m = -(h_1 + m - h_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \\ & = \frac{2}{n - h_2} \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \right. \\ & - \frac{1}{n - h_1} \sum_{m=1}^{n-h_1-1} m \{\gamma_{b_1 a_2}(-m - h_1) + \gamma_{a_1 b_2}(-m + h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(-m) - \gamma_{b_1 b_2}(-m - h_1 + h_2)\}^2 - \\ & \left. - \{\gamma_{b_1 a_2}(m - h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m + h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m + h_1 - h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждаем для случая $h_1 < h_2$.

$$\begin{aligned}
\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} &= \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\
&\times \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^0 \sum_{t=1}^{m+n-h_2} \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 + \right. \\
&+ \sum_{m=1}^{h_2-h_1} \sum_{t=m+1}^{m+n-h_2} \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 + \\
&+ \left. \sum_{m=h_2-h_1+1}^{n-h_1-1} \sum_{t=m+1}^{n-h_1} \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 \right] = \\
&= \frac{2}{n-h_1} \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 + \right. \\
&+ \frac{1}{n-h_2} \sum_{m=-(n-h_2-1)}^0 m \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 + \\
&+ \left. \frac{1}{n-h_2} \sum_{m=h_2-h_1+1}^{n-h_1-1} (h_2-h_1-m) \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 \right].
\end{aligned}$$

Во втором слагаемом выражения, стоящего в квадратных скобках, сделаем замену переменных: $m = -m$, а в третьем: $m = h_1 + m - h_2$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2b_2}(h_2)\} = \\
&= \frac{2}{n-h_1} \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(m)\}^2 + \right. \\
&- \frac{1}{n-h_2} \sum_{m=1}^{n-h_2-1} m \{\gamma_{b_1a_2}(-m-h_2) + \gamma_{a_1b_2}(-m+h_1) - \gamma_{a_1a_2}(-m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1b_2}(-m)\}^2 + \\
&+ \left. \{\gamma_{b_1a_2}(m-h_1) + \gamma_{a_1b_2}(m+h_2) - \gamma_{a_1a_2}(m) - \gamma_{b_1b_2}(m+h_2-h_1)\}^2 \right]
\end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты, учитывая (4), вытекает требуемое предельное соотношение (5) для ковариации.

Равенство (6) для дисперсии оценки взаимной вариограммы $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ нетрудно получить из (5), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$.

Следствие. Из теоремы 2 вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 0$, $a, b = \overline{1, r}$, $h = \overline{0, n-1}$.

В силу первого утверждения теоремы 1 и вышеуказанного следствия получаем, что $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для взаимной вариограммы $2\gamma_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h \in R$.

В работе [4] было найдено выражение для семиинвариантов высших порядков оценки вариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с непрерывным временем. Рассуждая аналогично, можно найти выражение для семиинвариантов высших

порядков оценки (1) взаимной вариограммы. Исследуем асимптотическое поведение семиинвариантов порядка $p, p > 2$, статистики (1).

Теорема 3. Пусть справедливо (4), тогда для оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, задаваемой равенством (1), имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cum\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), \dots, 2\tilde{\gamma}_{a_p b_p}(h_p)\} = 0, \quad (7)$$

$$h_j = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, p}, p > 2, n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. Используя свойства смешанных семиинвариантов из [5], имеем

$$cum\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), \dots, 2\tilde{\gamma}_{a_p b_p}(h_p)\} = \left[\prod_{j=1}^p (n - h_j) \right]^{-1} \times \\ \times \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} cum\{(X_{a_1}(s_1 + h_1) - X_{b_1}(s_1))^2, \dots, (X_{a_p}(s_p + h_p) - X_{b_p}(s_p))^2\}. \quad (8)$$

Заметим, что семиинварианты порядка $p, p > 2$, гауссовских случайных процессов равны нулю. Обозначим через J одно из слагаемых, входящих в правую часть последнего равенства. Далее, используя стационарность рассматриваемого процесса, имеем

$$J = \left[\prod_{j=1}^p (n - h_j) \right]^{-1} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} R_{a_1 b_2}(s_1 + h_1 - s_2) R_{a_2 b_3}(s_2 + h_2 - s_3) \times \dots \times \\ \times R_{a_{p-1} b_p}(s_{p-1} + h_{p-1} - s_p) R_{a_p b_1}(s_p + h_p - s_1).$$

Принимая во внимание связывающее соотношение для взаимной семивариограммы и взаимной ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса, учитывая (4), получаем, что $J \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассуждая аналогично, как и для J , можно показать, что остальные слагаемые в (8) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, справедливо предельное равенство (7). Теорема доказана.

Найдем асимптотическое распределение оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$.

Теорема 4. При выполнении условия (4) оценка $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, задаваемая равенством (1), имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием, равным $2\gamma_{ab}(h)$ и предельной ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению (5).

Доказательство. Ранее показано, что $M\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 2\gamma_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, и ковариация построенной оценки (1) взаимной вариограммы удовлетворяет предельному равенству (5). Поскольку справедливо соотношение (7), то окончательное доказательство теоремы следует из теоремы 1.2 [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cressie N. Statistics for Spatial Data / New York: Wiley. 1991. 900 p.
2. Tsekhavaya T.V. Limiting Distribution of the Variogram Estimator // Computer Data Analysis and Modeling. Complex Stochastic Data and Systems. Proceedings of the Eighth International Conference. Minsk, 2007. V.1. P.229-232.
3. Цеховая Т. В. Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры" (DE&CAS' 2005). Материалы Межд. мат. конференции. Брест, 2005. С. 78-82.
4. Цеховая Т. В. Асимптотическое распределение оценки вариограммы // Вестник БрГУ им. А.С. Пушкина. 2008. №2(31). С. 32-37.
5. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Мн.: БГУ, 1999. 218 с.