СПЕЦИФИКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

В составе заданий централизованного тестирования по математике часто встречаются **текстовые задачи, содержащие условия, математическая запись которых приводит к неравенствам. При этом существенно используется тот факт, что неизвестные величины могут принимать только целые значения.**

Пример 1. Если роту солдат построить в колонну по 8 солдат в ряду, то один ряд окажется неполным. Если выполнить построение по 7 солдат в ряду, то рядов окажется на 2 больше, и все они будут полными. Если же построить роту по 5 солдат в ряду, то рядов будет еще на 7 больше, но один ряд будет заполнен не весь. Сколько солдат насчитывается в роте?

Решение. Пусть x — количество солдат в роте, а y — количество рядов при первоначальном построении. Тогда $8y > x$.

При построении по 7 солдат в ряду получим: $7(y+2) = x$. Наконец, при построении по 5 человек в ряду имеет место неравенство $5(y+2+7) > x$.

В итоге получаем систему, в состав которой входят два неравенства и одно уравнение:

$$\begin{cases} 8y > x, \\ 7(y+2) = x, \\ 5(y+9) > x. \end{cases}$$

Выразим x из уравнения и подставим в каждое из неравенств:

$$\begin{cases} 8y > 7y + 14, \\ 5y + 45 > 7y + 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 14, \\ 31 > 2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 14, \\ y < 15\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Единственным целым числом, удовлетворяющим обоим неравенствам, является число 15. Поэтому $y = 15$.

Подставляя найденное значение y в уравнение, получим $x = 119$, т. е. в роте насчитывается 119 солдат.

Ответ: 119.

Пример 2. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит на каждый лист по 20 марок, то ему не хватит альбома. Если же он будет клеить по 23 марки на лист, то, по меньшей мере, один лист окажется пустым. Если подарить школьнику еще один такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. Пусть x — количество листов в альбоме, а y — количество марок, имеющихся у школьника.

Если школьник наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, т. е. $20x < y$. Если же школьник наклеит на каждый лист по 23 марки, то, по крайней мере, один лист останется пустым, т. е. $23(x-1) \geq y$. Если школьнику подарить еще один альбом с x листами, в котором на каждом листе будет наклеено по 21 марке, то всего у него будет 500 марок, т. е. $21x + y = 500$.

В итоге получаем систему, состоящую из одного уравнения и двух неравенств:

$$\begin{cases} 21x + y = 500, \\ 20x < y, \\ 23(x-1) \geq y. \end{cases}$$

Выразим y из уравнения и подставим в каждое из неравенств:

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 23(x-1) \geq 500 - 21x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 41x < 500, \\ 44x \ge 523, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 12\dfrac{8}{500} \\ x \ge 11\dfrac{39}{523}. \end{cases}$$

Единственным целым числом, удовлетворяющим этим неравенствам, является число 12. Таким образом, в альбоме 12 листов.

Ответ: 12.

Другой тип текстовых задач предполагает учет местоположения цифр в целом числе и использует представление числа через составляющие его цифры.

Пример 3. Генерал-лейтенант русской армии Борис Герасимович Кутневич, происходивший из дворян Могилевской губернии, жил в XIX веке. Суммы цифр года его рождения и смерти одинаковы. Число прожитых им лет начинается цифрой 8. Определить год рождения генерала Кутневича.

Решение. Пусть $\overline{18xy}$ — год рождения, а $\overline{18zt}$ — год смерти Кутневича. Тогда для возраста генерала имеет место выражение:

$$(10z+t)-(10x+y)=8\cdot 10+k,$$
$$10(z-x)+(t-y)=80\cdot 10+k,$$

где x, y, z, t, k — целые числа от 0 до 9.

Очевидно, что $z-x>0$ и $z-x=8$ или $z-x=9$. Кроме того, из условия задачи следует $1+8+x+y=1+8+z+t$. Отсюда $z-x=y-t$. Поскольку $z-x>0$, то $y-t>0$, т. е. $y>t$.

Если допустить, что $z-x=8$, то $k \ge 0$, т. е. $t-y \ge 0 \Rightarrow t \ge y$. Но это противоречит полученному ранее условию $y>t$.

Поэтому окончательно получим $z-x=9$, т. е. $z=9;\ x=0$ и $y-t=9$, т. е. $y=9;\ t=0$.

Таким образом, генерал Кутневич родился в 1809 году, а умер в 1890 году.

Ответ: 1809.

Еще один тип текстовых задач предполагает разложение целых чисел на простые сомножители.

Пример 4. Для двух различных натуральных чисел выполнили четыре операции: эти числа сложили, перемножили, вычли из большего меньшее, разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырех результатов равна 441. Найти все возможные значения для большего из исходных чисел.

Решение. Пусть x — меньшее, а $y=nx$ — большее из исходных чисел.

Тогда по условию задачи имеем уравнение

$$(x+nx)+(x\cdot nx)+(nx-x)+\frac{nx}{x}=441,$$

из которого следует:

$$2nx+nx^2+n=441,$$
$$n\left(x^2+2x+1\right)=441,$$
$$n(x+1)^2=3^2\cdot 7^2.$$

Задача сводится к решению в натуральных числах систем уравнений:

$$\begin{cases} n=3^2, \\ (x+1)^2=7^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n=7^2, \\ (x+1)^2=3^2, \end{cases}$$

откуда $n=9,\ x=6$ или $n=49,\ x=2$.

Таким образом, поскольку $y=nx$, большее из исходных чисел равно 54 или 98.

Ответ: 54 или 98.

Задачи для самостоятельного решения

1. В шахматном турнире, организованном по случаю приезда шефской делегации, участвовали две девушки и несколько военнослужащих. Каждый участник турнира сыграл с каждым из остальных по две партии. Число партий, сыгранных военнослужащими между собой, превысило число партий, сыгранных ими с девушками, на 14. Сколько военнослужащих участвовало в турнире?

Ответ: 7.

2. На лугу растет трава. На луг пустили 9 коров, и они съели всю траву за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней. Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

Ответ: 6.

3. Великий польский композитор Фредерик Шопен родился в начале XIX века. Если бы ему удалось дожить до следующего столетия, то в 1901 году сумма цифр числа лет, прожитых композитором, равнялась бы сумме цифр года его рождения. В каком году родился Шопен?

Ответ: 1810.

4. Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

Ответ: 36.

5. Определить, сколько существует пар целых чисел, сумма которых равна их произведению.

Ответ: 2.

6. Известно, что сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 2000. Сколько решений имеет эта задача?

Ответ: 4.

7. Сколько существует двузначных чисел, каждое из которых ровно на 21 меньше суммы квадратов своих цифр?

Ответ: 4.

А. С. Шибут