

ЧИСЛО 2012 В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Вот и наступил 2012 год. Каким он станет? Что принесет нынешним одиннадцатиклассникам: радость от поступления в престижный вуз или горечь разочарования от неудачи? Конечно, итоговый результат зависит прежде всего от усилий самих абитуриентов. Но недаром среди некоторой части молодежи так популярны сегодня гороскопы, предсказания и нумерология.

Еще великий Пифагор считал, что числа правят миром. Его нумерологическое учение было основано на аксиоме, что числа скрывают в себе тайну Вселенной. Другой древний мыслитель, Платон, верный пифагорейской традиции, утверждал, что в основе всех явлений лежит математический код.

Попробуем взглянуть на число 2012 с математической точки зрения.

Так вот, високосный 2012 год обещает стать прежде всего **непростым** (число 2012 имеет делители, отличные от самого этого числа и единицы).

К сожалению, год 2012-ый является и **несовершенным**. Напомним, что натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих собственных делителей (т. е. делителей, отличных от самого числа). Примерами совершенных чисел являются $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Кстати, следующие совершенные числа отстоят далеко: 496, 8128, 33550336, 8589869056...

Не замечены у 2012 и **дружественные** числа. Еще пифагорейцы, жившие две с половиной тысячи лет тому назад, обнаружили, что числа 220 и 284 обладают замечательным свойством. Сумма собственных делителей числа 220 равна $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$. В свою очередь для числа 284 соответствующая сумма равна $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Эта связь между числами скорее всего не очень удивила древних математиков, которые объявили данную пару чисел символом дружбы. С тех пор два числа, такие, что каждое из них равно сумме собственных делителей другого, называются дружественными. Приведем несколько следующих пар дружественных чисел: 1184 и 1210, 2620 и 2924, 5020 и 5564. Как видите, нам с вами ждать наступления дружественного года придется более шестисот лет.

Совершенные и дружественные числа укладываются в следующую схему. Сложим все собственные делители некоторого числа, получим второе число; найдем сумму всех его собственных делителей, получим третье число; найдем далее сумму всех собственных делителей третьего числа и т. д. Может оказаться, что на некотором шаге получится исходное число, т. е. цепочка замкнется. Если замкнутая цепочка состоит из одного звена, то это число совершенное; если из двух звеньев, то образующие ее числа дружественные; если более чем из двух, то все числа этой цепочки называются **компанейскими**. Правда, пока не найдено ни одной цепочки, состоящей из трех звеньев. Зато есть компании по 4, 5, 6, 8 участников. Известна, например, единственная цепочка из пяти компанейских чисел: 12496, 14288, 15472, 14536, 14264.

Что же касается других математических свойств числа 2012, то с этой точки зрения оно мало чем выделяется на фоне остальных.

Разложение числа 2012 на простые сомножители имеет вид $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$.

2012 — это так называемое **число-каньон**: первая и последняя цифры у него совпадают, а средние цифры меньше крайних и образуют своеобразную впадину (каньон):

$$\begin{array}{cccc} 2 & . & . & 2 \\ & . & . & 1 \\ & & . & 0 \end{array}$$

Число 2012 является первым из всех 4-значных чисел-каньонов. Следующие за ним подобные числа 2102, 3013...

Любопытно, что у чисел 2012 и 2102 квадратичные свойства повторяются при записи цифр в обратном порядке:

$$2012^2 = 4048144 \rightarrow 4418404 = 2102^2.$$

Эти же числа обладают и еще одной интересной особенностью. Напомним, что **числовой палиндром** — это натуральное число с симметричным расположением цифр, которое читается слева направо и справа налево одинаково. Будучи не палиндромным, число 2012 после умножения на свое реверсное представление 2102 образует палиндромное число:
 $2012 \cdot 2102 = 4229224$.

Приведем несколько математических примеров, условие которых так или иначе связано с числом 2012.

Пример 1.

Найти значение выражения $\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n}}$ при $n = 2012$.

Решение.

Преобразуя дробь, стоящую по знаком радикала, убеждаемся, что результат не зависит от заданного n :

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + n \cdot 3n \cdot 9n}} = \sqrt[3]{\frac{8(1 + 2^3 + \dots + n^3)}{27(1 + 2^3 + \dots + n^3)}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 2.

Найти значение выражения $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2012}}$. В ответ записать ближайшее целое число, не превосходящее результат.

Решение.

Преобразуя числители дробей в разность и пользуясь формулой $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2012}} &= \frac{2-1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{3-2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{4-3}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{2012-2011}{\sqrt{2011} + \sqrt{2012}} = \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2012} - \sqrt{2011} = \sqrt{2012} - \sqrt{1} = \sqrt{2012} - 1. \end{aligned}$$

Так как $44 < \sqrt{2012} < 45$, то $43 < \sqrt{2012} - 1 < 44$.

Ответ: 43.

Пример 3.

Найти сумму всех несократимых дробей вида $\frac{n}{5}$, где n — натуральное число, $n \leq 2012$. В ответ записать ближайшее целое число, превосходящее результат.

Решение.

Искомая сумма представляет собой разность суммы всех дробей вида $\frac{n}{5}$, где $n \in \mathbb{N}, n \leq 2012$, и суммы всех сократимых дробей указанного вида.

Сумму всех дробей вида $\frac{n}{5}$, где $n \in \mathbb{N}, n \leq 2012$, найдем как сумму 2012 членов арифметической прогрессии $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2012}{5}$:

$$S_1 = \frac{1 + \frac{2012}{5}}{2} \cdot 2012 = \frac{2013 \cdot 2012}{2 \cdot 5} = 405015,6.$$

Среди дробей рассматриваемого вида сократимыми являются дроби, в числителе которых находятся числа, кратные 5 (5, 10, ..., 2010). Следовательно, значения этих дробей составляют арифметическую прогрессию: 1, 2, ..., 402. Их сумма равна:

$$S_2 = \frac{1+402}{2} \cdot 402 = 403 \cdot 201 = 81003.$$

Искомая сумма равна:

$$S = S_1 - S_2 = 405015,6 - 81003 = 324012,6.$$

Ответ: 324013.

Пример 4.

Найти сумму $\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2011 \cdot \cos 2012}$.

Решение.

Преобразуем вначале $\sin 1$:

$$\sin 1 = \sin(k - (k-1)) = \sin k \cdot \cos(k-1) - \cos k \cdot \sin(k-1).$$

Тогда для k -го члена исходной суммы получим:

$$\frac{\sin 1}{\cos(k-1) \cdot \cos k} = \frac{\sin k \cdot \cos(k-1) - \cos k \cdot \sin(k-1)}{\cos(k-1) \cdot \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1).$$

Так как k — целое, то $k \neq \frac{\pi}{2}m$ ни при каком целом m и, следовательно, полученное выше равенство справедливо для всех значений k .

Применив эту формулу к каждому слагаемому исходной суммы, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2011 \cdot \cos 2012} = \\ & = (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \dots + (\operatorname{tg} 2012 - \operatorname{tg} 2011) = \operatorname{tg} 2012 - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} 2012. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{tg} 2012$.

Пример 5.

Найти сумму первых 2012 членов последовательности (x_n) , если $x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, где

$a_1, a_2, a_3, \dots$ — арифметическая прогрессия с положительными членами.

Решение.

Преобразуем вначале выражение для x_n :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d},$$

где d — разность упомянутой арифметической прогрессии. Поэтому

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{2012} &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2013}} - \sqrt{a_{2012}}}{d} = \frac{\sqrt{a_{2013}} - \sqrt{a_1}}{d} = \\ &= \frac{(\sqrt{a_{2013}} - \sqrt{a_1})(\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1})}{d(\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1})} = \frac{a_{2013} - a_1}{d(\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1})} = \frac{(a_1 + d \cdot 2012) - a_1}{d(\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1})} = \frac{2012}{\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2012}{\sqrt{a_{2013}} + \sqrt{a_1}}$.

Пример 6.

Действительные числа x и y таковы, что $\cos x = \cos y$ и $\sin x = -\sin y$. Найти значение выражения $\sin 2012x + \sin 2012y$.

Решение.

Поскольку $\cos x = \cos y$ и $\sin x = -\sin y$, то

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = -\sin y \cdot \cos y + \cos y \cdot \sin y = 0.$$

Поэтому $x+y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sin 2012x + \sin 2012y &= 2 \cdot \sin \frac{2012x + 2012y}{2} \cdot \cos \frac{2012x - 2012y}{2} = 2 \cdot \sin(1006(x + y)) \cdot \cos(1006(x - y)) = \\ &= 2 \cdot \sin(1006(k\pi)) \cdot \cos(1006(x - y)) = 0.\end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 7.

Найти произведение корней уравнения $\sqrt[2012]{2012} \cdot x^{\log_{2012} x} = x^{11}$.

Решение.

Логарифмируя исходное уравнение по основанию 2012, получим:

$$\log_{2012} \left(2012^{\frac{1}{2012}} \cdot x^{\log_{2012} x} \right) = \log_{2012} x^{11};$$

$$\frac{1}{2012} + (\log_{2012} x)^2 = 11 \cdot \log_{2012} x.$$

Обозначая $\log_{2012} x = y$, приходим к квадратному уравнению $y^2 - 11y + \frac{1}{2012} = 0$, которое

имеет два корня y_1 и y_2 , так как его дискриминант $D = 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2012} > 0$.

В силу теоремы Виета $y_1 + y_2 = 11$, что для корней x_1 и x_2 исходного уравнения дает:

$$\log_{2012} x_1 + \log_{2012} x_2 = \log_{2012} (x_1 x_2) = 11;$$

$$x_1 x_2 = 2012^{11}.$$

Ответ: 2012^{11} .

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим число 2012 и все различные четырехзначные числа, которые можно составить, переставляя цифры числа 2012. (Число не может начинаться цифрой 0.) Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 16110.

2. Чему равно значение выражения $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2012}\right)$?

Ответ: 1006,5.

3. Число $n = 111\dots 1$ состоит из 2012 цифр 1. Найти сумму цифр в числе $m = 2012 \cdot n$.

Ответ: 10060.

4. Какая дата будет ровно через 2012 часов 2012 минут после 20 часов 12 минут 20.12.2012?

Ответ: 16.03.2013.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2012$?

Ответ: 2013.

Подготовил А. С. Шибут