СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

М. Н. Мицкевич

НИИ прикладных проблем математики и информатики
Минск, Беларусь
E-mail: mitskevich_m@mail.ru

Рассмотрены два критерия обнаружения неоднородностей временных рядов, основанные на вейвлет-преобразовании. Проведен сравнительный анализ эффективности критериев с помощью статистического моделирования.

Ключевые слова: временной ряд, разладка, вейвлет-преобразование, пороговое значение, критерий, эффективность.

ВВЕДЕНИЕ

Для выявления локальных неоднородностей и, в частности, разладок широко применяется вейвлет-анализ [1–3]. Основная идея его применения заключается в том, что абсолютные значения вейвлет-коэффициентов, в силу свойства локальности вейвлет-преобразования, имеют максимальные значения в моменты разладок [2, 3]. В литературе описано много методов обнаружения неоднородностей, но сравнительный анализ различных критериев проводился редко [1].

Наиболее часто для построения решающих правил используются два подхода. Первый заключается в поиске превышающих порог вейвлет-коэффициентов. Второй подход основан на построении статистик от вейвлет-коэффициентов, нахождении их распределения и вычислении *p*-значения для нулевой гипотезы.

Эти подходы были использованы для построения критерия, основанного на сумме квадратов вейвлет-коэффициентов, превышающих модифицированный универсальный порог $\delta = \sigma\sqrt{\log(n)a_n}$, где $a_n = c(\log n)^{-b}$, b и c – некоторые константы.

Для сравнения был выбран критерий, основанный на значениях вейвлет-коэффициентов. Со статистической точки зрения проблема обнаружения разладок с использованием вейвлет-коэффициентов может быть также рассмотрена как проблема множественной проверки гипотез относительно распределения вейвлет-коэффициентов.

Методом статистического моделирования получены оценки вероятности ошибок первого и второго рода критериев, произведен их сравнительный анализ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим временной ряд:

$$X(t) = \{x_t \mid t = 0,...,T-1\}, T = 2^M, M \in N. \quad (1)$$

Временной ряд (1) имеет разладку в неизвестный момент времени $t_0 \in \{v_-, v_- + 1, ..., v_+\}$, где $0 < v_- < v_+ < T - 1$ – некоторые априорно заданные граничные значения, и состоит из фрагментов стационарных временных рядов:

$$X(t) = f(t) + z_t,\ f(t) = \begin{cases} \mu, 0 \le t \le t_0 - 1, \\ \mu + \tau, t \ge t_0, \end{cases} t = 0, ..., T - 1, \quad (2)$$

где $z_t \sim N(0,1)$ – независимые в совокупности стандартные случайные величины.

Определим нулевую гипотезу H_0, состоящую в том, что временной ряд (1) является стационарным $(\tau = 0)$, и альтернативную гипотезу H_1, означающую наличие во временном ряду разладки (2).

Определим дискретное вейвлет-преобразование временного ряда (1)[1]:

$$d_{j,k}^{(\psi)} = \sum_{t=0}^{T-1} x_t \psi_{j,k}(t),\ j = 1, ..., M,\ k = 0, ..., 2^{M-j} - 1, \quad (3)$$

где $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k)$, $\psi(t)$ – базисный вейвлет, j – параметр масштаба (уровень разрешения), k – параметр сдвига. В качестве базисного вейвлета $\psi(t)$ будем использовать вейвлет Хаара, который образует ортонормированный базис:

$$\psi_{j,k}^{H}(x) = \begin{cases} 2^{-j/2}, 2^j k \le x \le 2^j (k + 1/2), \\ -2^{-j/2}, 2^j (k + 1/2) \le x \le 2^j (k + 1), \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

При выполнении нулевой гипотезы H_0 вейвлет-коэффициенты (3) временного ряда (1), вычисленные с использованием вейвлета Хаара (4), на каждом уровне разрешения $j = 1, ..., M$ независимы и имеют асимптотически стандартное нормальное распределение $d_{j,k}^{(\psi)} \xrightarrow{D} N(0,1)$ [4].

КРИТЕРИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ЗНАЧЕНИЯХ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

Если временной ряд (1) является однородным, то все вейвлет-коэффициенты статистически незначимо отличаются от нуля и по абсолютной величине не превосходят определенного порогового значения. Это пороговое значение будем определять исходя из следующих предположений.

Исходные гипотезы H_0 и H_1 о распределении вероятностей ряда (1) можно заменить набором индивидуальных гипотез H_{0jk} и H_{1jk} о распределении каждого вейвлет-коэффициента, для которых строится набор решающих правил:

$$\text{принимается} \begin{cases} H_{0jk}, \text{ если } d_{j,k}^{(\psi)} \sim N(0,1), \\ H_{1jk}, \text{иначе.} \end{cases}$$

Гипотеза H_0 принимается в том случае, если принимаются все гипотезы H_{0jk}, и альтернативная гипотеза H_1 принимается, когда принимается хотя бы одна из гипотез H_{1jk}.

Построим алгоритм тестирования вейвлет-коэффициентов, состоящий из следующих шагов и основанный на подходе из статьи [5].

1. Для каждого вейвлет-коэффициента $d_{j,k}^{(\psi)}$ в предположении, что выполняется нулевая гипотеза H_{0jk}, вычисляется двухстороннее *p*-значение $p_{jk} = 2(1 - \Phi(|\, d_{j,k}^{(\psi)}\,|))$, где $\Phi(.)$ – функция стандартного нормального распределения $N(0,1)$.

2. Вычисленные *p*-значения p_{jk} упорядочиваются по возрастанию $p_{(1)} \le p_{(2)} \le ... \le p_{(n)}$, где каждое значение $p_{(i)}$ соответствует определенному вейвлет-коэффициенту $d_{j,k}^{(\psi)}$, $n = T$ - 1.

3. В построенном вариационном ряду для всех $i = 1,...,n$ проверяется условие $p_{(i)} \ge (i/n)\alpha$, где α – заданный уровень значимости. Если это условие выполняется, то принимается индивидуальная гипотеза $H_{0(i)}$.

4. Если найдено l, что для всех $i = 1,...,l$ выполняется $p_{(i)} < (i/n)\alpha$, то принимаются индивидуальные гипотезы $H_{1(i)}$ и вычисляется пороговое значение $\lambda_i = \Phi^{-1}(1 - p_{(i)}/2)$, с помощью которого можно определить оценку момента разладки.

КРИТЕРИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА СУММЕ КВАДРАТОВ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

Обозначим последовательность вейвлет-коэффициентов:

$$y_i = d_{j,k}^{(\psi)}, i = 1,...,n, j = 1,...,M, k = 0,...,2^{M-j}, n = T - 1. \quad (5)$$

Затем построим статистику по сумме квадратов коэффициентов (5), превышающих порог $\delta = \sigma\sqrt{2\log(na_n)}$:

$$\hat{Q}^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 I(|\, y_i \,| > \delta), \quad (6)$$

где $I(.)$ – индикаторная функция.

В [6] были доказаны следующие теорема и следствие.

Теорема. Если выполняется гипотеза H_0 и $a_n \log^{1/2} n \to 0$, тогда статистика $\hat{Q}^*$ имеет асимптотически нормальное распределение.

Обозначим $\hat{Q} = \sigma_n^{-1}(\hat{Q}^* - \mu_n)$, где $\mu_n = \sqrt{2/\pi}\sigma^{-1}a_n^{-1}\delta(1 + \delta^{-2})$ и $\sigma_n^2 = \sqrt{2/\pi}\sigma^{-1}a_n^{-1}\delta^3(1 + 3\delta^{-2})$.

Следствие. Статистика $\hat{Q}$ имеет асимптотически стандартное нормальное распределение $\hat{Q} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Для статистики критерия мы используем $a_n = \log^{-3} n$. При H_0 $y_{\max} = \max_{1<i<n} y_i \approx (2\log n)^{1/2}$ и имеет большее значение при выполнении альтернативной гипотезы. Заменим $\log n$ на $y_{\max}^2/2$ для максимизации мощности критерия, не увеличивая ошибку первого рода. Тогда $\hat{a}_n = \min(8y_{\max}^{-6}, \log^{-3} n)$.

Решающее правило для критерия с уровнем значимости α определяется следующим образом:

$$\text{принимается} \begin{cases} H_0, & \text{если } \Phi\left(\hat{\theta}\right) \le 1-\alpha, \\ H_1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЯ

Для оценки эффективности построенного критерия на модельных данных были вычислены оценки вероятности первого и второго рода.

Число моделируемых рядов для оценки вероятности ошибок первого и второго рода каждого критерия – $K = 1000$.

Для оценки вероятности ошибок первого рода моделировались стационарные временные ряды длиной $T = 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}$. Уровень значимости для проверки нулевой гипотезы H_0 полагался равным α=0.05. Полученные оценки вероятности ошибок первого рода для всех анализируемых длин временных рядов не превышали заданный уровень значимости α.

Для оценки вероятности ошибок второго рода моделируемые временные ряды состояли из двух однородных фрагментов длиной $T_1 = T_2 = T/2$ с разладкой в моменты $t_0 = 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$. Величина скачка принимала значения $\tau \in \{0.05, 0.1, ..., 0.7\}$.

На рисунках 1–2 приведены графики мощности критериев для длин ряда 2^8 и 2^{11}: А – критерий, основанный на сумме квадратов вейвлет-коэффициентов, Б – критерий, основанный на значениях вейвлет-коэффициентов.

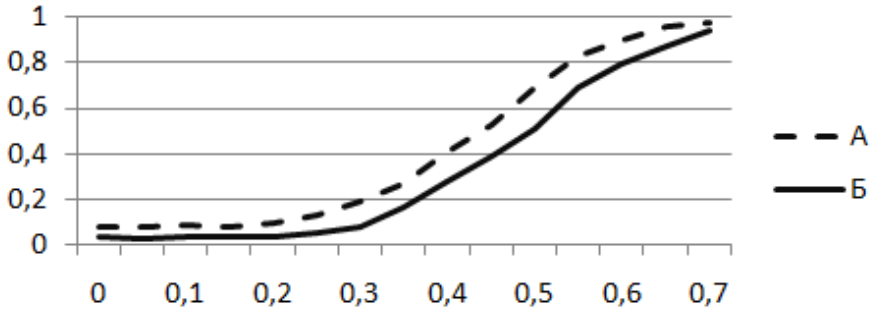

Рис. 1. Оценка мощности критериев для ряда длиной 2^8

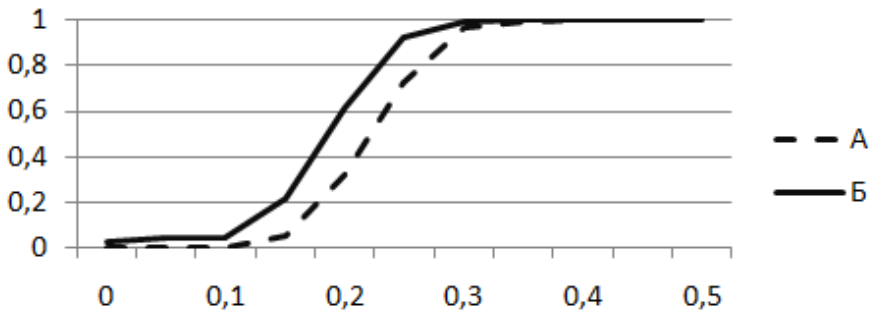

Рис. 2. Оценка мощности критериев для ряда длиной 2^{11}

Из графиков, приведенных на рис. 1–2, видно, что мощность критериев возрастает с ростом величины скачка и длины временного ряда. Критерий, основанный на значениях вейвлет-коэффициентов, имеет преимущество при работе с рядами большей длины, но проигрывает по мощности при работе с временными рядами длиной меньше чем 2^9 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nason, G. P.* "Wavelet Methods in Statistics with R (Use R) / G. P. Nason, Springer-Verlag, 2010, 257 p.

2. *Wang, Y.* Jump and sharp cusp detection by wavelets / Y. Wang // Biometrika. 1995. Vol. 82. P. 385-397.

3. *Chiann, C.* Wavelet Analysis for Times Series / C. Chiann, P. A. Morettin // Journal of Nonparametric Statistics. 1998. № 10. P. 63–91.

4. *Мицкевич, М. Н.* Обнаружение разладок временных рядов с использованием вейвлет-преобразования / М. Н. Мицкевич // Информационные системы и технологии (IST'2006): третья Междунар. конф. (Минск, 1–3 ноября 2006 г.): материалы: в 2 ч. Минск: Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2006. Ч. 2. С. 184–189.

5. *Simes, R. J.* An improved Bonferroni procedure for multiple tests of significance / R. J. Simes // Biometrika. 1986. Vol. 73. P. 751–754.

6. *Mitskevich, M. M.* Change-point detection based on thresholding statistic / M. M. Mitskevich // Computer Data Analysis and Modeling: Complex Stohastic Data and Systems : Proc. of the Ninth Intern. Conf., Minsk, Sept 7–10, 2010. In 2 vol. Vol. 1. Minsk : Publ. center of BSU, 2010. P. 253–256.