Целью работы является доказательство критерия оптимальности для задач вида (1), в которых условие Слейтера может нарушаться.

Обозначим через $X = \{x \in R^n : \ f(x,t) \le 0 \ \forall t \in T\}$ множество допустимых планов задачи (1). Пусть $f^{(0)}(x,t) = f(x,t), \ f^{(s)}(x,t) = \partial^s f(x,t)/\partial t^s, \ s \in N; \ N(q) = \{0, 1, \dots, q\}, \ q \ge 0, \ N(q) = \emptyset, \ q < 0, \ q \in Z$.

Определение 1. *Число $q(t) \in \{-1, 0, 1, ...\}$ будем называть степенью неподвижности индекса $t \in T$ в задаче ПБП (1), если для любого вектора $x \in X$ выполняются равенства $f^{(s)}(x,t) = 0, \ s \in N(q(t))$, и существует такой вектор $x(t) \in X$, что $f^{(q(t)+1)}(x(t),t) \ne 0$.*

Определение 2. *Индекс $t \in T$ назовем неподвижным индексом, если $q(t) > -1$.*

Предполагается, что в задаче ПБП (1) существует конечное число неподвижных индексов $t_i^0, \ i = 1, ..., p$, и степени их неподвижности $q_i = q(t_i^0), \ i = 1, ..., p$, меньше бесконечности. Приводится конечный алгоритм определения степеней неподвижности индексов задачи ПБП (1).

Положим $\beta_i = 1$ при $t_i^0 \in [t_*, t^*)$ и $\beta_i = (-1)^{q_i+1}$ при $t_i^0 = t^*, \ i = 1, ..., p$. Рассмотрим вектор $x^0 \in X$ и соответсвующее ему множество индексов активных ограничений $T_a(x^0) = \{t \in T : \ f(x^0, t) = 0\}$. Сформируем вспомогательную задачу нелинейного программирования

$$\begin{gathered} c(x) \to \min, \\ f^{(s)}(x, t_i^0) = 0, \ s = 1, ..., q_i, \ \beta_i f^{(q_i+1)}(x, t_i^0) \le 0, \ i = 1, ..., p, \\ f(x, t_j) \le 0, \ j \in I(x^0), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\{t_j, \ j \in I(x^0)\} \subset T_a(x^0) \backslash \{t_1^0, ..., t_p^0\}$.

Доказывается, что справедлив следующий критерий оптимальности.

Теорема 1. *Вектор $x^0 \in X$ оптимален в задаче (1) тогда и только тогда, когда существует такое множество $I(x^0), \ |I(x^0)| \le n$, что x^0 оптимален в задаче (2).*

Данный критерий оптимальности не требует выполнение условия Слейтера, позволяет свести проверку оптимальности плана x^0 в задаче ПБП (1) с континуумом ограничений к проверке оптимальности этого плана в задаче нелинейного программирования (2) с конечным числом ограничений и применять к задаче (1) те же критерии оптимальности, что и для задач (2).

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Щеглова

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Лермонтова 134, 664033 Иркутск, Россия
shchegl@icc.ru

Рассматривается управляемая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \ \ t \in I = (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon), \tag{1}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t, x, y, u)$ определена в некоторой окрестности $\mathcal{D}$ точки $(a_0, 0, 0, 0)$; $x(t)$ – искомая вектор-функция размерности n; $u(t)$ — l-мерная функция управления; $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Предполагается, что $F(t, 0, 0, 0) = 0 \ \ \forall t \in I$, $F(t, x, y, u)$ имеет достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и $\det \dfrac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y} \equiv 0$

в $\mathcal{D}$. Системы вида (1) с тождественно вырожденной матрицей Якоби $\partial F/\partial y$ называют системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Мерой неразрешенности ДАУ относительно производной искомой вектор-функции служит целочисленная величина $r:\ 0 \le r \le n$, называемая индексом.

В статье [1] получены признаки полной управляемости линейных нестационарных ДАУ. Используемая техника приведения к виду, разрешенному относительно производных, опирающаяся на преобразование к так называемой центральной канонической форме [2], позволила изучить системы с вещественно аналитическими коэффициентами.

В данной работе, насколько известно автору, сделана первая попытка исследовать локальную нуль-управляемость нелинейной ДАУ (1) по ее первому приближению

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0,\ \ t \in I, \tag{2}$$

где $A(t) = \dfrac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial y}(t,0,0,0)$, $B(t) = \dfrac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial x}(t,0,0,0)$, $U(t) = \dfrac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial u}(t,0,0,0)$.

Определение 1. *Вектор-функцию $u(t):\ I \to \mathbf{R}^l$ будем называть допустимым управлением для ДАУ (1), если $u(t) \in \mathbf{C}^r(I)$ и $\forall t \in I$ вектор-столбец $\operatorname{colon}\Big(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)\Big)$ принадлежит некоторой окрестности нуля в пространстве $\mathbf{R}^{l(r+1)}$.*

Определение 2. *Система (1) называется локально нуль-управляемой на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I$, если существует δ-окрестность точки $0 \in \mathbf{R}^n$ такая, что для любого вектора $x_0 \in \mathbf{R}^n$: $\|x_0\| < \delta$ найдется такое допустимое управление $u_0(t)$, что существует решение системы*

$$F(t, x(t), x'(t), u_0(t)) = 0,\ t \in T,$$

удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = 0$.

Определение 3. *Система (2) называется полностью управляемой на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I$, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ найдется управление $u(t) \in \mathbf{C}^r(T)$, такое, что существует решение системы (2), удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.*

Поскольку исследование управляемости линейных ДАУ представляет самостоятельный интерес, для систем вида (2) с гладкими коэффициентами получены критерии полной управляемости, которые переходят в соответствующие известные критерии для систем, разрешенных относительно производной искомой вектор-функции [3]. Показано, что в линейном случае полная управляемость влечет за собой локальную нуль-управляемость.

Для анализа управляемости как линейных так и нелинейных ДАУ привлекается преобразование к эквивалентной форме. В частности, один из критериев полной управляемости в линейном случае формулируется в терминах коэффициентов эквивалентной формы

$$x_1'(t) = J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)u^{(j)}(t),\ \ x_2(t) = J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} G_j(t)u^{(j)}(t),\ \ t \in I, \tag{3}$$

где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x$, Q_1 — матрица перестановок. Эквивалентность означает, что при некоторых ограничениях на коэффициенты системы (2) каждое решение системы (2) является решением системы (3) и наоборот.

В нелинейном случае построение эквивалентной формы является весьма нетривиальной задачей, связанной с нахождением неявной функции, удовлетворяющей r–продолженной системе. Под r–продолженной системой можно понимать совокупность ДАУ (1) и ее r полных производных по t. В то же время задача нахождение эквивалентной формы для линейной системы вполне конструктивна и по трудоемкости равнозначна обращению некоторой матрицы.

Показано, что при определенных предположениях для нелинейной системы операции линеаризации и перехода к эквивалентной форме перестановочны. Это позволяет избежать при исследовании управляемости нелинейной ДАУ построения для нее эквивалентной формы. Доказано, что в условиях теоремы существования [4] локальная нуль-управляемость нелинейной ДАУ (1) является следствием полной управляемости или локальной нуль-управляемости ее линейного приближения (2).

Следует отметить, что линейные и нелинейные ДАУ в данной работе исследуются в весьма общих предположениях. В частности, индекс неразрешенности системы может быть произвольно высоким. В линейном случае не требуется, чтобы ранг матрицы при производной искомой вектор-функции был постоянен. При исследовании нелинейных ДАУ предположения теоремы существования являются близкими к условию, необходимому для регулярного поведения решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ НШ–1676.2008.1

Список литературы

1. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 63–75.
2. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск : Наука, 2003.
3. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных ситем. Минск: изд-во Института математики НАН Беларуси, 1999.
4. *Щеглова А.А.* Нелинейные алгебро-дифференциальные системы // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 4. С. 931–948.

К ВОПРОСУ О ПОИСКЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ERP-СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМ ПРЕДПРИЯТИЕМ

А.И. Якимов

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
ykm@tut.by

Введение. Решение задач оптимизации сложных систем затруднено тем, что трудно выразить зависимость между входными и выходными параметрами модели в аналитическом виде. Это вынуждает использовать имитационные модели для описания подобных систем. Методы оптимизации, основанные на случайном поиске обладают некоторыми недостатками: повышенные требования к вычислительным ресурсам по сравнению с методами, специально спроектированными для решения определенных проблем, отсутствие гарантии нахождения глобального оптимума, сложность реализации, однако часто являются основным способом решения задачи.

1. Имитационная модель в ERP-системе управления промышленным предприятием. Использование имитационной модели (ИМ) для поиска рациональных решений в ERP-системе управления промышленным предприятием [1] осуществляется следующей последовательностью этапов [2]:

Этап 1. Формулировка целей управления. Определяются цели (множество целей), которые должны быть реализованы в процессе управления.