О КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Н.Я. Радыно

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

mir@bsu.by

Введение. Основой для классификации особых точек дифференциальных систем служит классификация, предложенная Пуанкаре [4] для случая системы однородных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Cx + Dy, \\ \dfrac{dy}{dt} = Ax + By, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Эта классификация [3] основана на рассмотрении всех возможных случаев решения квадратного уравнения $A + (B - C)\lambda - D\lambda^2 = 0$, в зависимости от коэффициентов A, B, C, D.

Обобщенные комплексные числа делят на типы. А именно, различают эллиптические комплексные числа, гиперболические комплексные числа и параболических комплексные числа [2], [1]. Обобщенные комплексные числа характеризуются свойством мнимой единицы i. Это означает следующее. Пусть $i^2 = \alpha + \beta i$, тогда числа делятся на указанные типы в зависимости от того, какими являются α, β. Если $\alpha + \dfrac{\beta^2}{4} < 0$, то такие обобщенные комплексные числа относятся к *эллиптическому типу*, если же $\alpha + \dfrac{\beta^2}{4} > 0$, то к *гиперболическому*, если $\alpha + \dfrac{\beta^2}{4} = 0$ — *параболическому*. Итак, если взять $i^2 = -1$, то мы получим обычные комплексные числа, которые являются каноническим видом эллиптических обобщенных комплексных чисел. Если $i^2 = 1$, обозначим такую мнимую единицу через $\varkappa$, т.е. $\varkappa^2 = 1$, тогда получим двойные числа — канонический вид гиперболических обобщенных комплексных чисел. Наконец, если $i^2 = 0$, обозначим такую мнимую единицу через ε, т.е. $\varepsilon^2 = 0$, то получим дуальные числа — канонический вид параболических обобщенных комплексных чисел. Заметим, что [5]

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a + \beta b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a + ib)(x_0 + ix_1), \tag{1}$$

где $i^2 = \alpha + \beta i$ и a, b, x_0, x_1, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Указанное свойство свяжем с классификацией особых точек дифференциальных систем второго порядка по Пуанкаре.

1. Классификация особых точек с использованием обобщенных комплексных чисел. Исходя из замечания (1) система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_0} = ax_0 + \alpha b x_1, \\ \dot{x_1} = bx_0 + (a + \beta b)x_1, \end{cases} \tag{2}$$

равносильна уравнению

$$\dot{z} = (a + ib)z, \tag{3}$$

где $z = x_0 + ix_1, i^2 = \alpha + \beta i$ и a, b, x_0, x_1, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Решением же последнего дифференциального уравнения является функция:

$$z(t) = e^{(a+ib)t}c,$$

где $c = c_0 + ic_1$ — произвольное обобщенное комплексное число, здесь $i^2 = \alpha + \beta i$.

Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a + \beta b \end{pmatrix} \tag{4}$$

равны $\lambda_{1,2} = a + \beta b/2 \pm |b|\sqrt{\alpha + \dfrac{\beta^2}{4}}$. Более того, любая матрица второго порядка с действительными элементами приводится невырожденным преобразованием к матрице вида (4). Поэтому справедлива следующая классификация.

Теорема 1. *Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$.*

Если система (2) равносильна дифференциальному уравнению (3) для функции со значениями в эллиптических числах, то тип точки покоя $(0, 0)$ — фокус или центр.

Если система (2) равносильна дифференциальному уравнению (3) для функции со значениями в гиперболических числах, то тип точки покоя $(0, 0)$ — седло или бикритический узел.

Если система (2) равносильна дифференциальному уравнению (3) для функции со значениями в параболических числах, то тип точки покоя $(0, 0)$ — монокритический узел.

Если же $a \neq 0$, $b = 0$, то система (2) равносильна дифференциальному уравнению (3) для функции со значениями в действительных числах. В этом случае, тип точки покоя $(0, 0)$ — дикритический узел.

Список литературы

1. *Кантор И.В., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.,Л.: ОГИЗ, 1947.
4. *Пуанкаре А.* О кривых определяемых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.,Л.: ОГИЗ, 1947.
5. *Радыно Н.Я.* О функциях гиперкомплексного переменного и их применении к интегрированию систем дифференциальных уравнений в замкнутом виде // Вестник БГУ. Сер. 1. 2008. № 1. С. 83–88.

ПРЯМОЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.М. Ракецкий

Брестский государственный технический университет, Московская 267, 224017 Брест, Беларусь
rvm@bstu.by

Рассматривается задача выпуклого квадратичного программирования в сетевой постановке

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^*)^2 \to \min, \tag{1}$$

$$b_{*i} \leq x_{k_i} - x_{l_i} \leq b_i^*, i = \overline{1, m}; \tag{2}$$

$$d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Здесь x_j, $j = \overline{1, n}$, — искомые переменные; x_j^*, d_{*j}, d_j^*, $j = \overline{1, n}$, b_{*i}, b_i^*, $i = \overline{1, m}$, - известные числовые параметры.