откуда, в силу условий теоремы, следует равенство $\mathbf{x}_1^*(t) \equiv 0$, а значит, решения системы, предельной к (3), не принадлежат множеству (5).

Таким образом нулевое решение ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$) системы (3) равномерно асимптотически устойчиво. И значит, невозмущенное движение $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) будет стабилизировано до равномерной асимптотической устойчивости.

На основе этой теоремы получены условия стабилизации квазистационарного вращения спутника на эллиптической орбите.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00741).

Список литературы

1. *Агафонов С.А.* Устойчивость движения неконсервативных систем и оценка области притяжения // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 239–243.
2. *Иванов А.П.* Об устойчивости механических систем с позиционными неконсервативными силами // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 707–712.
3. *Кошляков В.Н.* К проблеме качественного исследования гироскопических систем неконсервативной структуры // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 10–18.
4. *Косов А.А.* Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 411–426.
5. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. — 2006. — Т. 70. — Вып. 6. — С. 965–976.
6. *Перегудова О.А.* Логарифмические матричные нормы в задачах устойчивости движения // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 410–420.

ПОТОЧЕЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

О.Н. Поддубная

Белорусский государственный экономический университет, Партизанский пр. 26, 220070 Минск, Беларусь
poddubnaya.o@tut.by

Введение. Многие реальные экономические процессы описываются с помощью гибридных динамических систем управления с запаздывающим аргументом. Наличие в таких системах взаимосвязанных дифференциальных и алгебраических уравнеий позволяет достаточно точно формализовать многие реальные процессы, что объясняет актуальность изучения гибридных систем. В докладе рассматривается проблема относительной управляемости в заданных точках для гибридных динамических систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гибридную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t), \\ y(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}y(t-h) + B_2u(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^m; u(t)$ при $t \geq 0$ является кусочно-непрерывной r-векторной функцией (допустимым управлением).

Начальные условия для системы (1) зададим в виде:

$$x(+0) = x(0) = x_0,\ y(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [-h, 0), \tag{2}$$

где h=$const, h > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot)$–кусочно-непрерывная на отрезке $[-h, 0]$ m-векторная функция.

Пусть $H \in \mathbb{R}^{p\times(n+m)}$ –произвольная матрица.

Определение 1. *Система (1)-(2) называется $H-t_1$-управляемой при $t_1>0$ в точках $\beta_1,\beta_2,...,\beta_\gamma$, $0=\beta_1<\beta_2<...<\beta_\gamma<t_1$ (γ –фиксированное число), если для любых векторов $x_0\in\mathbb{R}^n$ и $\begin{bmatrix} c_i \\ b_i \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n+m}, i=\overline{1,\gamma}$, и любых начальных данных $\psi(\tau)$, $\tau\in[-h,0)$ существует допустимое управление $u(\cdot)$ такое, что для соответствующего решения системы выполняется условие $H\begin{bmatrix} x(t_1-\beta_i) \\ y(t_1-\beta_i) \end{bmatrix}=H\begin{bmatrix} c_i \\ b_i \end{bmatrix}, i=\overline{1,\gamma}$.*

В виду линейности изучаемой гибридной системы (1)-(2) ее решение может быть представлено в виде суперпозиции двух векторных функций, одна из которых зависит только лишь от управляющего воздействия, а вторая–только от начальных данных: $\begin{bmatrix} x(t,x_0,\psi,u) \\ y(t,x_0,\psi,u) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(t,0,0,u) \\ y(t,0,0,u) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x(t,x_0,\psi,0) \\ y(t,x_0,\psi,0) \end{bmatrix}$, поэтому относительную управляемость в заданных точках гибридной системы можно изучать при $\psi(\tau)=0, \tau\in[-h,0)$.

Задача относительной управляемости в заданных точках решена в работе [1] для динамической системы вида:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)+bu(t), t>0.$$

2. Критерий поточечной управляемости гибридных систем. Для изучения поточечной управляемости гибридных систем управления применим хорошо известную технику определяющих уравнений [2].Для гибридной системы управления (1)-(2)определяющие уравнения зададим в виде:

$$\begin{aligned} &X_{k+1}(t)=A_{11}X_k(t)+A_{12}Y_k(t)+B_1U_k(t), \\ &Y_k(t)=A_{21}X_k(t)+A_{22}Y_k(t-h)+B_2U_k(t), t\geq 0, k=-1,0,1,\dots; \end{aligned} \tag{3}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} &X_k(t)=0, Y_k(t)=0, \text{ for } t<0 \text{ or } k\leq 0; \\ &U_0(0)=I_r,\ U_k(t)=0 \text{ for } t^2+k^2\neq 0. \end{aligned}$$

В работе [3] доказана

Лемма 1. *Решения определяющих уравнений (3) обладают свойством:*

$$rank\left\{\begin{bmatrix} X_k(jh) \\ Y_k(jh) \end{bmatrix}, \begin{matrix} k=0,1,...,k_1 \\ j=0,1,...,j_1 \end{matrix}\right\}=rank\left\{\begin{bmatrix} X_k(jh) \\ Y_k(jh) \end{bmatrix}, \begin{matrix} k=0,1,...,min\{k_1,n\} \\ j=0,1,...,min\{j_1,m\} \end{matrix}\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{bmatrix} w(t-\beta_i) \\ i=\overline{1,\gamma} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w(t-\beta_1) \\ w(t-\beta_2) \\ ... \\ w(t-\beta_\gamma) \end{bmatrix}, diag[H]_{i=1}^{\gamma}=\begin{bmatrix} H & 0 & ... & 0 \\ 0 & H & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & H \end{bmatrix},$$

$T_t=[\frac{t}{h}]$ для $t\geq 0$ (символы $[z]$ и $\{z\}$ обозначают целую и дробную части соответственно).

Основным результатом доклада является следующая

Теорема 1. *Система (1)-(2) H-t_1-управляема в точках $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\gamma$ тогда и только тогда, когда*

$$rank\left\{\left[\begin{array}{l} H\left[\begin{array}{c} X_k(s-\beta_i) \\ Y_k(s-\beta_i)\end{array}\right] \\ i=\overline{1,\gamma}\end{array}\right] k=0,1,...,n; s\in\{\ jh+\beta_i|i=\overline{1,\gamma}, j=\overline{0, min\{T_{t_1}-1, m\}}\ \},\right.$$
$$\left.\left[\begin{array}{l} H\left[\begin{array}{c} X_k(s-\beta_i) \\ Y_k(s-\beta_i)\end{array}\right]\eta_{\beta_i} \\ i=\overline{1,\gamma}\end{array}\right] k=0,1,...,n; s\in\{min\{T_{t_1}, m\}h+\beta_i|i=\overline{1,\gamma}\}\right\}$$
$$=rank\left\{\left[\begin{array}{l} H\left[\begin{array}{c} X_k(s-\beta_i) \\ Y_k(s-\beta_i)\end{array}\right] \\ i=\overline{1,\gamma}\end{array}\right] k=0,1,...,n; s\in\{\ jh+\beta_i|i=\overline{1,\gamma}, j=\overline{0, min\{T_{t_1}-1, m\}}\ \},\right.$$
$$\left.\left[\begin{array}{l} H\left[\begin{array}{c} X_k(s-\beta_i) \\ Y_k(s-\beta_i)\end{array}\right]\eta_{\beta_i} \\ i=\overline{1,\gamma}\end{array}\right] k=0,1,...,n; s\in\{min\{T_{t_1}, m\}h+\beta_i|i=\overline{1,\gamma}\}\ , diag[H]_{i=1}^{\gamma}\right\},$$

где η_{β_i}-характеристическая функция вида $\eta_{\beta_i}=\begin{cases}0, & \text{если } \{\frac{t_1}{h}\}<\{\frac{\beta_i}{h}\}, \\ 1, & \text{если } \{\frac{t_1}{h}\}\geq\{\frac{\beta_i}{h}\}.\end{cases}$

Доказательство теоремы 1 основано на построении множества поточечтой H-t_1-достижимости и изучении его свойств. Множество поточечтой H-t_1-достижимости строится с использованием представления решения в виде ряда по решениям определяющих уравнений: $\begin{bmatrix} x(t,0,0,u) \\ y(t,0,0,u)\end{bmatrix} = \sum\limits_{k=0}^{T_t}\begin{bmatrix} 0 \\ Y_0(kh)\end{bmatrix} u(t-kh) + \int\limits_0^t \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_{\substack{i=0 \\ (t-\tau-ih>0)}}^{+\infty}\begin{bmatrix} X_{k+1}(ih) \\ Y_{k+1}(ih)\end{bmatrix}\frac{(t-\tau-ih)^k}{k!}u(\tau)d\tau,$

полученного в работе [3] и использовании леммы 1.

Список литературы

1. *Минюк С.А.* Две задачи управляемости для линейной системы с последействием// Вестник БГУ. 1972. Сер. 1. № 1. С. 8-11.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971-508с.
3. *Марченко В.М., Поддубная О.Н.* Линейные стационарные ГДР системы: I. Представление решений// Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 24-38.

К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Е.И. Поясок

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

poyasok@bsu.by

Управление осуществляется, как правило, в условиях неопределенности, которая возникает из-за неточности математического моделирования объекта управления, неточности реализации расчетных значений управляющих воздействий, из-за внешних возмущений, неизбежно сопровождающих процесс управления, из-за ошибок измерения входных и выходных сигналов, на которых основано формирование управляющих воздействий. В подобных условиях используется позиционное управление, соответствующее принципу управления по замкнутому контуру. Тогда текущие управляющие воздействия создаются по текущей информации о поведении объекта и действующих на него возмущениях, что позволяет в определенной степени парировать вредное воздействие неопределенности на качество процесса управления. Канал, по которому в управляющий орган поступает и преобразуется