НАБЛЮДАЕМОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

О.А. Панасик

Гродненский государственный университет, факультет математики и информатики

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

panasikolga@rambler.ru

Введение. Рассмотрим систему наблюдения

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t), t \in T = [0, t_1], \tag{1}$$

$$x(0) = q, q \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t), \tag{3}$$

здесь $A_0\,(A)$ и G – постоянные $n \times n-$ и $r \times n-$ матрицы соответственно, $x(t), t \in T$, – непрерывная функция, а $A_0x(t), t \in T$, – непрерывно дифференцируемая функция, $t_1 > 0$ – фиксированный момент времени.

Считаем, что система (1) является регулярной: существует такое комплексное λ, что $\det[\lambda A_0 - A] \neq 0$, а начальный вектор q является допустимым, то есть система (1), (2) имеет решение. В литературе такие начальные данные называют также согласованными [1] или совместимыми.

Начальный n-вектор q будет допустимым для системы (1) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$[E - C_0A_0]q = 0, \tag{4}$$

где C_0 – первый элемент системы базовых матриц $C_i, i = \overline{0, k}$, $k = \text{index}(A_0, A)$ [1].

Отметим, что в случае $\det A_0 \neq 0$, условие (4) отсутствует, так как тогда $C_0 = A_0^{-1}$ [1] и любой начальный вектор $q \in \mathbb{R}^n$ будет допустимым (согласованным) для системы (1).

1. Полная наблюдаемость алгебро-дифференциальных систем.

Определение 1. *Начальное положение $x(0) = q$ системы (1)-(3), удовлетворяющее условию (4), назовем наблюдаемым по Р. Калману, если его можно восстановить по выходу (3) единственным образом.*

Систему (1)-(3) назовем полностью наблюдаемой по Р. Калману, если каждое ее допустимое начальное положение наблюдаемо.

Теорема 1. *Для полной наблюдаемости по Р. Калману системы (1)-(3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda A_0 - A \\ G \end{bmatrix} = n$$

для всех комплексных λ.

С помощью канонической формы [1] системы (1)-(3) получен критерий полной наблюдаемости системы (1)-(3) в параметрическом виде

$$\text{rank}\begin{bmatrix} GC_0A_0 \\ GC_0A \\ \dots \\ G(C_0A)^{d-1} \end{bmatrix} = n,$$

здесь d – степень полинома $\det[\lambda A_0 - A]$.

Определение 2. *Систему наблюдения (1)-(3) назовем полностью наблюдаемой по Н.Н. Красовскому, если для любого начального вектора* q*, удовлетворяющего (4), существует* $r \times n-$*матричная функция* $\bar{V}(\tau) = [V_1(\tau);\ V_2(\tau);\dots;V_n(\tau)]$ *с элементами ограниченной вариации на* T*, такая, что*

$$x'(0) = q' = \int\limits_0^{t_1} y'(\tau)d\bar{V}(\tau).$$

Теорема 2. *Полностью наблюдаемая по Р. Калману система (1)-(3) является полностью наблюдаемой по Н.Н. Красовскому.*

2. Идеальная наблюдаемость алгебро-дифференциальных систем. Пусть объект наблюдения описывается системой

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), t \in T = [0, t_1], \tag{5}$$

$$x(0) = q, q \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t), \tag{7}$$

где B – постоянная матрица размеров $n \times m$, $u - m$-вектор управления, выбираемый из множества допустимых управлений U_{A_0}, которое состоит из согласованных с начальным условием (6) достаточно гладких функций $u(t), t \in T$:

$$[E - C_0A_0]\,q = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}[C_iBu(t)]\Big|_{t=0},$$

здесь $k = \mathrm{index}(A_0, A), C_i, i = \overline{0,k},$ – базовые матрицы пары матриц (A_0, A) [1].

В случае $\det A_0 \neq 0$ множество U_{A_0} состоит из всех кусочно-непрерывных функций $u(t), t \in T$.

Определение 3. *Систему (5), (7) назовем идеально наблюдаемой, если нулевому выходу* $y(t) \equiv 0, t \in T$*, независимо от любого допустимого управляющего воздействия* $u(\cdot) \in U_{A_0}$*, соответствует только нулевое решение* $x(t) \equiv 0, t \in T$*.*

Будем считать, что матрица B обратима слева ($Bu = 0 \Leftrightarrow u = 0$).

Теорема 3. *Для идеальной наблюдаемости системы (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda A_0 - A & -B\\ G & 0\end{bmatrix} = n + m$$

для всех комплексных λ.

Список литературы

1. *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.