СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ РОБАСТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

О.Ф. Опейко

Белорусский национальный технический университет, Независимости, 65, 220013 Минск, Беларусь
oopeiko@bntu.by

Робастный регулятор может быть синтезирован по критерию принадлежности замкнутой системы допустимому множеству линейных моделей. Множество линейных моделей формируется на основании свойств характеристических полиномов, в частности нормальных полиномов, использованных Б.Н. Петровым и его сотрудниками [1], а так же Насленом [2]. Робастность по отношению к изменению порядка рассмотрена в [3].

Линейная стационарная система с одним входом и одним выходом имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$, u – скалярное управление, и

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & I & & \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}.$$

Элементы $a_i, (i = 1, \dots, n)$ матрицы A изменяются в известных пределах

$$a_i \in [a_{0i}, a_{0i} + \triangle a_i], \qquad \triangle a_i \geq 0.$$

Допустимое множество линейных моделей имеет вид

$$\dot{x} = A_M x. \tag{2}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & I & & \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & \dots & -d_n \end{bmatrix},$$

и характеристический полином

$$N(s) = s^n + d_n s^{n-1} + \dots + d_2 s + d_1 \tag{3}$$

каждой такой модели должен удовлетворять условиям

$$\kappa_i = \frac{d_i^2}{d_{i-1}d_{i+1}} \in [\underline{\kappa}, \overline{\kappa}], \qquad \omega_0 = \frac{d_1}{d_2} \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}]. \tag{4}$$

Нижняя черта означает нижний, а верхняя черта – верхний пределы соответствующих величин. Параметры κ_i называются коэффициентами затухания, а ω_0 – характеристическая частота. Эти два параметра служат показателями качества синтезируемой системы. В частности, полином (3) может быть нормальным полиномом [1, 2]. В этом случае $\kappa_i = \kappa_0 = const$, и, следовательно, коэффициенты полинома выражаются через характеристическую частоту

$$d_i = \kappa_0^{f(i)} \omega_0^{n-i+1}. \tag{5}$$

Здесь

$$f(i) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(i-2)(i-1)}{2}.$$

Необходимо найти закон управления в форме $u = -Kx$, такой, чтобы полином замкнутой системы принадлежал множеству, определяемому выражениями (3), (4) в условиях изменений параметров объекта. Следует отметить, что поставленная задача не всегда имеет решение, а лишь для достаточно широких пределов (4) при заданных изменениях параметров.

Предположим, что для номинальных параметров $a_{0i}, (i = 1, \dots, n)$ объекта обратные связи K обеспечивают нормальный характеристический полином (3) замкнутой системы, следовательно $d_i = a_{0i} + bk_i, (i = 1, \dots, n)$. При произвольных отклонениях параметров от расчетных полином примет вид

$$N(s) = s^n + (d_n + \triangle a_n)s^{n-1} + \dots + (d_2 + \triangle a_2)s + d_1 + \triangle a_1. \tag{6}$$

Обозначим относительные изменения параметров $\gamma_i = \triangle a_i / d_i$. Тогда для показателей затухания и характеристической частоты полинома (6) получаются выражения:

$$\kappa_i = \frac{(d_i + \triangle a_i)^2}{(d_{i-1} + \triangle a_{i-1})(d_{i+1} + \triangle a_{i+1})} = \kappa_0 \frac{(1+\gamma_i)^2}{(1+\gamma_{i-1})(1+\gamma_{i+1})}, \ \omega = \frac{d_1 + \triangle a_1}{d_2 + \triangle a_2} = \omega_0 \frac{1+\gamma_1}{1+\gamma_2}. \tag{7}$$

Очевидно, что характеристическая частота может изменяться в пределах

$$\underline{\omega_0} \le \omega_0/(1+\gamma_2) \le \omega \le \omega_0(1+\gamma_1) \le \overline{\omega}_0. \tag{8}$$

Обозначим $\varepsilon = \max\limits_i \gamma_i$. Из (7) получим

$$\underline{\kappa} \le \kappa_0/(1+\varepsilon)^2 \le \kappa_i \le \kappa_0(1+\varepsilon)^2 \le \overline{\kappa}. \tag{9}$$

Из (9) можно определить допустимый для ε верхний предел

$$\varepsilon \le \min(\sqrt{\kappa_0/\underline{\kappa}} - 1, \ \sqrt{\overline{\kappa}/\kappa_0} - 1). \tag{10}$$

Для выполнения этого условия $d_i, (i = 1, \dots, n)$ должны быть наибольшими допустимыми, что, как следует из (5), требует наибольшего значения ω_0, определяемого из (8) по выражению

$$\omega_0(1+\gamma_1) = \overline{\omega}_0.$$

Тогда для $d_i, (i = 1, \dots, n)$ с учетом (5) получим

$$d_i = (\overline{\kappa}^{f(i)})\overline{\omega}_0^{(n-i+1)}(1+\gamma_1)^{-(n-i+1)}).$$

Значение ε будет равно

$$\varepsilon = \max_i(\gamma_i/d_i) = \max_i(\gamma_i \overline{\kappa}^{-f(i)})\overline{\omega}_0^{-(n-i+1)}(1+\gamma_1)^{n-i+1}). \tag{11}$$

Если полученное значение удовлетворяет условию (10), задача робастного синтеза разрешима, а параметры k_i регулятора нетрудно определить по номинальным параметрам объекта и значениям $d_i, (i = 1, \dots, n)$.

В противном случае необходимо изменить постановку задачи.

Список литературы

1. *Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др.* Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: инженерные методы анализа и синтеза. М.: Машиностроение, 1986. 256 с.
2. *Naslin P.* Polinomes normaux et critere algebrique d' amortissement (I) // Automotisme. 1963. T. 8. No 6. P. 215–223.
3. *Опейко О.Ф.* Синтез линейной системы на основании упрощенной модели объекта // АиТ. 2005. № 1. С. 29–35.