ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАНИЦЕ УСТОЙЧИВОСТИ

А.А. Несенчук, Г.С. Микулик

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь
{anes,gmikulik}@newman.bas-net.by

Рассматривается система автоматического управления, динамика которой описывается семейством интервальных характеристических уравнений вида

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n = 0, \qquad (1)$$

где вектор коэффициентов $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит некоторому связному множеству $A \subset R^{n+1}$, $a \in A$, n – степень полинома (целое число); s – комплексное переменное, $s = \sigma + i\omega$.

Положим, что коэффициенты (1) действительны и изменяются в следующих пределах: $\underline{a}_j \leq a_j \leq \overline{a}_j$, $j = \overline{1,n}$, $a_0 \neq 0$, где $\underline{a}_j$ и $\overline{a}_j$ – соответственно минимальное и максимальное значения замкнутого интервала изменения коэффициента a_j.

С целью формирования корневых годографов выделим один из коэффициентов уравнение (1)(свободный коэффициент a_k) и перепишем (1) относительно этого коэффициента

$$a_k = f(s) = -\frac{\phi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \qquad (2)$$

где $\phi(s) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j s^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} a_j s^{n-j}$ и $\psi(s) = s^{n-k}$ – полиномы интервального семейства; u и v – гармонические функции двух независимых действительных переменных σ и ω.

Корневым годографом алгебраического уравнения назовем отображение заданной кривой комплексной плоскости a_k варьируемого параметра на плоскость комплексного переменного s, осуществляемое с помощью функции, определяемой из данного уравнения [1].

Для рассматриваемых систем автоматического управления таким алгебраическим уравнением является характеристическое уравнении вида (1). В качестве варьируемого параметра может использоваться любой из коэффициентов характеристического уравнения или входящий в коэффициенты параметр.

При вариации любого из коэффициентов уравнения (1) по определенному закону в комплексной плоскости этого коэффициента корни данного уравнения, изменяясь, порождают корневые годографы в плоскости комплексного переменного s системы, которые полностью описывают ее динамические свойства: устойчивость, показатели качества и др. Корневые годографы описываются функцией (2)

На основании функции отображения (2) запишем уравнение корневого годографа Теодорчика – Эванса [1]

$$v(\sigma, \omega) = 0 \qquad (3)$$

и соответствующее уравнение параметра

$$u(\sigma, \omega) = a_k \qquad (4)$$

для рассматриваемой интервальной системы с характеристическим уравнением (1).

Устойчивость системы с параметрической неопределенностью, описываемой семейством характеристических уравнений (1), определяется расположением корней семейства относительно мнимой оси $i\omega$) плоскости корней s, являющейся границей асимптотической устойчивости системы.

Установим характер пересечения границы асимптотической устойчивости системы, описываемой семейством характеристических уравнений четвертого порядка вида: $s^4 + a_1 s^3 +$

$a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$, ветвями свободных корневых годографов с параметром a_3, учитывая, что все коэффициенты уравнения задаются определенными интервалами значений. Для этой цели рассмотрим корневой портрет системы и воспользуемся функцией параметра (4) годографа и уравнением корневого годографа (3). Подставив значение $\sigma = 0$ в уравнения (3) и (4), определим для поля уравнение корневого годографа и функцию параметра траектории на границе асимптотической устойчивости:

$$-a_1\omega^3 + a_3\omega = 0, \tag{5}$$

$$a_4 = -\omega^4 + a_2\omega^2,\ \underline{a}_2 \le a_2 \le \overline{a}_2. \tag{6}$$

Уравнение корневого годографа (5) используется для нахождения координат ω точек пересечения границы устойчивости ветвями корневых годографов поля, а функция параметра (6) – для определения значений свободного параметра (в рассматриваемом случае – a_4) в найденных точках.

Ввиду аналитичности и непрерывности функций (5) и (6) очевидно, что точки пересечения границы устойчивости (оси $i\omega$) ветвями годографов поля образуют на этой оси некоторую область D^f_ω, причем каждая ветвь образует некоторую непрерывную подобласть указанной области. Определим максимальное и минимальное значения функции параметра в области D^f_ω. Для этого исследуем ее на экстремум с помощью первой производной:

$$u'(\omega) = -4\omega^3 + 2a_2\omega = 0. \tag{7}$$

Решив (7) для $a_2 = \overline{a}_2$, получим максимальные точки экстремума функции параметра на границе устойчивости. Для $n = 4$ будет три точки.

Решив (7) для $a_2 = \underline{a}_2$, получим минимальные точки экстремума функции параметра на границе устойчивости. Для $n = 4$ их тоже будет три.

На основании полученных значений экстремумов строятся мажоранта и миноранта функции параметра годографа, которые представляют собой чередование участков возрастания и убывания этой функции.

Таким образом, область пересечения границы устойчивости ветвями корневого портрета рассматриваемой системы может быть разделена на три подобласти: а) возрастание функции параметра; б) убывание функции параметра; в) смешанная подобласть, где имеет место сочетание участков возрастания и убывания.

Установлено, что, если годографы корневого портрета интервальной динамической системы пересекают границу устойчивости в области, где функция параметра только возрастает или убывает, то для проверки устойчивости вместо четырех (согласно теореме Харитонова для полиномов степени n) достаточно только одного уравнения семейства:

$$s^4 + \overline{a}_1s^3 + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s + \overline{a}_4 = 0 \text{ – на участке возрастания или} \tag{8}$$

$$s^4 + \underline{a}_1s^3 + \underline{a}_2s^2 + \overline{a}_3s + \overline{a}_4 = 0 \text{ – на участке убывания.} \tag{9}$$

Если же годографы корневого портрета интервальной динамической системы пересекают границу устойчивости в области, где сочетаются участки возрастания и убывания функции параметра, то для проверки устойчивости требуются два уравнения семейства:

$$s^4 + \overline{a}_1s^3 + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s + \overline{a}_4 = 0, \tag{10}$$

$$s^4 + \underline{a}_1s^3 + \underline{a}_2s^2 + \overline{a}_3s + \overline{a}_4 = 0. \tag{11}$$

Предложена процедура синтеза устойчивых интервальных семейств характеристических полиномов четвертого порядка на основе уравнений (8) – (11).

Список литературы

1. *Римский Г.В., Таборовец В.В.* Автоматизация исследований динамических систем. Мн.: Наука и техника, 1978.