К ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.И. Минченко, С.М. Стаховский, А.Н. Тараканов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, П.Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь

inform@bsuir.by

Предлагаемая статья посвящена исследованию параметрических задач с неединственным решением и вопросам существования в таких задачах производных функции оптимального значения. Основная идея предлагаемого в данном разделе подхода сводится к дальнейшему развитию метода аппроксимаций производных многозначных отображений, предложенного В.Ф.Демьяновым и А.М.Рубиновым [1] и использовавшегося в работах [2, 3]. Пусть $f(x,y)$, $h_i(x,y)$ $i=1,:,p$ — непрерывно дифференцируемые функции из $R^n \times R^m$ в R. Рассмотрим задачу $P(x)$ минимизации по переменной y функции $f(x,y)$ на множестве $F(x)$, где

$$F(x)=\{y\in R^m | h_i(x,y)\le 0 \quad i\in I, \quad h_i(x,y)=0 \quad i\in I_0\},$$

$x\in R^n$, $I=1,:,s$, $I_0=s+1,:,p$ или $I_0=\emptyset$.

Обозначим $\varphi(x)=\min\{f(x,y)|y\in F(x)\}$, $\omega(x)=\{y\in F(x)|f(x,y)=\varphi(x)\}$.

Пусть $z=(x,y)$, $z_0=(x_0,y_0)$. Для задачи $P(x)$ введем функцию Лагранжа $L(z,\lambda)=f(z)+\langle\lambda,h(z)\rangle$, где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_p)$, $h=(h_1,...,h_p)$.

Обозначим через

$$\Lambda(z,\lambda)=\{\lambda\in R^p|\nabla_x L(z,\lambda)=0, \quad \lambda_i\ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z)=0, \quad i\in I\}$$

множество множителей Лагранжа в точке $z=(x,y)$ и введем множество активных индексов $I(z)=\{i\in I|h_i(z)=0\}$ в точке $z=(x,y)\in grF$.

Введем множество

$$\Gamma(z_0;\bar{x})=\{\bar{y}\in R^m|\langle\nabla h_i(z_0),\bar{z}\rangle\leqslant 0 \;\; i\in I(z_0),\, \langle\nabla h_i(z_0),\bar{z}\rangle=0 \;\; i\in I_0\}$$

Пусть $\rho(x,C)=\inf\limits_{y\in C}\|x-y\|$, где $\|y\|$ — евклидова норма вектора y, B — открытый единичный шар с центром в 0 в соответствующем пространстве.

Будем говорить, что многозначное отображение F R-регулярно в точке $z_0=(x_0,y_0)$, если найдутся числа $\alpha>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что

$$\rho(y,F(x))\le\alpha\max\{0, \; h_i(x,y) \;\; i\in I, \; |h_i(x,y)| \;\; i\in I_0\}$$

для всех $x\in x_0+\delta_1 B$, $y\in y_0+\delta_2 B$.

Будем говорить, что многозначное отображение ω липшицево сверху в точке x_0, если существуют число $l>0$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что $\rho(y,\omega(x_0))\leqslant l|x-x_0|$ для всех $y\in\omega(x)$ и $x\in V(x_0)$.

Пусть $y_0\in\omega(x_0)$. Будем говорить, что многозначное отображение ω псевдолипшицево сверху в точке $z_0=(x_0,y_0)$, если существуют число $l>0$ и окрестности $V(x_0)$ и $V(y_0)$ точек x_0 и y_0 такие, что $\rho(y,\omega(x_0))\leqslant l|x-x_0|$ для всех $y\in\omega(x)\cap V(y_0)$ и всех $x\in V(x_0)$.

В работе [4] в основном изучались задачи, имеющие единственное решение при $x=x_0$, т.е. рассматривался случай $\omega(x_0)=\{y_0\}$, и выделялось некоторое однозначное решение $y(x)$ непрерывное в точке $x=x_0$ и удовлетворяющее условию липшицевости в точке x_0 в том смысле, что в окрестности точки x_0

$$|y(x)-y(x_0)|\le M\,|x-x_0|\,, \quad M=const.$$

Следующий простой пример показывает, что в случае неоднозначности множества $\omega(x_0)$ ситуация сложнее. В частности, может существовать непрерывное в точке x_0 однозначное решение $y(x)$, которое не является липшицевым, в то время как многозначное отображение ω будет липшицевым сверху в точке x_0.

Пример 1. *Пусть* $f(x, y) = -y_2 \to \min\limits_{y}$,
где $x \in R$, $F(x) = \left\{y \in R^2 |\ y_2 - y_1^2 \le 0,\ y_2 = x,\ 0 \le y_1 \le 1\right\}$.

Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = (0, 0)$. Очевидно

$$\omega(x) = F(x), \quad y(x) = (\sqrt{x}, x) \in \omega(x), \quad y(x) \to y_0 = (0, 0),$$

т.е. решение $y(x)$ не является липшицевым в точке x_0. В то же время $\rho(y, \omega(x_0)) = |y_2| = |x|$ для всех $y \in \omega(x)$.

Лемма 1. *Пусть функции h_i и f C^1-дифференцируемы, многозначное отображение F — R-регулярно в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in gr\omega$ и экстремальное многозначное отображение ω псевдолипшицево сверху в этой точке. Тогда при $\bar{x} \in R^n$, $t_k \downarrow 0$ и любых последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{y_{0k}\}$ таких, что $x_k = x_0 + t_k\bar{x} + o(t_k) \in domF$, $y_k \in \omega(x_k)$ и $y_k \to y_0 \in \omega(x_0)$ при $k \to \infty$, $y_{0k} \in \omega(x_0)$, $|y_{0k} - y_k| \leqslant M|x_k - x_0|$, $M = const > 0$ справедливы, начиная с некоторого значения $k = k_0$, разложения*

$$y_k = y_{0k} + t_k\bar{y}_{1k} + o(t_k),$$

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = t_k\langle\nabla f(z_{0k}), \bar{z}_{1k}\rangle + o(t_k),$$

где $z_{0k} = (x_0, y_{0k})$, $\bar{z}_{1k} = (\bar{x}, \bar{y}_{1k})$, $\{\bar{y}_{1k}\}$ — ограниченная последовательность такая, что $\bar{y}_{1k} \in \Gamma(z_{0k}; \bar{x})$.

Теорема 1. *Пусть $F(x_0) \neq \emptyset$ и пусть многозначное отображение F равномерно ограничено в точке x_0 и R-регулярно во всех точках $z_0 = (x_0, y_0)$ таких, что $y_0 \in \omega(x_0)$, а экстремальное многозначное отображение ω липшицево сверху в точке x_0. Пусть функции h_i и f в окрестности $z_0 = (x_0, y_0)$ C^1-дифференцируемы. Тогда функция φ дифференцируема в точке x_0 по любому направлению $\bar{x} \in R^n$, причем*

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle\nabla f(z_0), \bar{z}\rangle = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle\nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x}\rangle;$$

Список литературы

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М., 1990.
2. *Luderer B.,. Minchenko L, Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publishers. 2002.
3. *Minchenko L., Tarakanov A.* //Optimization. V.54, 2005. P.433-442.
4. *Bonnans F.,Shpiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. Springer-Verlag, New York, 2000.