Теорема 1. *Для экпоненциальной стабилизируемости системы (1) регулятором (2) достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\det(I_n - D(e^{-ph})) = 0, \quad \det K(m) \equiv \phi(m) = 0, \; m \in \mathbb{C},$$

лежали вне круга $|m| \leq 1$.

Замечание. Условия теоремы 1 достаточно легко проверяемы, поскольку требуют проверки корней не квазиполиномов, а полиномов. В процессе доказательства теоремы получен регулятор вида (2), экспоненциально стабилизирующий систему (1). Коэффициенты искомого регулятора получаются из решения системы линейных алгебраических уравнений над полем частных кольца квазиполиномов.

Работа выполнена в рамках научного сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКОЙ НМ-СЕТИ

М.А. Маталыцкий, О.М. Сытая

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
m.matalytski@gmail.com, sytaya_om@mail.ru

Рассматривается замкнутая марковская НМ-сеть – марковская сеть массового обслуживания с доходами, в которой обслуживается постоянное число заявок K. Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор

$$k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, ..., k_n, t),$$

где k_i – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{1, n}$. Число состояний сети равно $N = C_{n+K-1}^{n-1}$. Матрицу вероятностей переходов между состояниями сети обозначим через $Q = \|q_{ij}\|_{N \times N}$. Можно установить связь между этой матрицей и матрицей вероятностей переходов заявок между системами сети $P = \|p_{ij}\|_{n \times n}$, где p_{ij} – вероятность перехода заявки из системы S_i в систему S_j. Заявка при переходе из одной системы в другую приносит последней системе некоторый доход, который может являться случайной величиной с заданными моментами первых двух порядков; доход первой системы уменьшается соответственно на эту величину.

Будем называть НМ-сеть управляемой, если в каждый момент времени t и в каждом состоянии $l = 1, 2, ..., N$ может быть выбрана строка матрицы Q

$$q_l^{(n_l)} = \left(q_{l_1}^{(n_l)}, q_{l_2}^{(n_l)}, ..., q_{l_N}^{(n_l)}\right)$$

и строка матрицы одношаговых доходов R

$$r_l^{(n_l)} = \left(r_{l_1}^{(n_l)}, r_{l_2}^{(n_l)}, ..., r_{l_N}^{(n_l)}\right),$$

определяющих дальнейшее функционирование сети.

Величина n_l называется стратегией управления в l-ом состоянии, а $N_l = \{n_l\}$ – множеством стратегий управления в l-ом состоянии. Вектор стратегий $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, ..., \bar{n}_N) \in N_i \times N_2 \times ... \times N_N$ назовем политикой. Если стратегия n_l или политика $\bar{n}$ выбираются в момент времени t, то пишем $n_l(t)$ или $\bar{n}(t) = (\bar{n}_1(t), \bar{n}_2(t), ..., \bar{n}_N(t))$. Последовательность выбранных в различные моменты моменты времени политик образуют управление

$\bar{\bar{n}}(t) = (\bar{n}(t), \bar{n}(t+\Delta t), ..., \bar{n}(T_{max}))$, определяющее эволюцию сети. Если $T_{max} < \infty$, то говорим о конечном горизонте управления, в противном случае – о бесконечном.

Пусть $E = E(\bar{\bar{n}})$ – эффективность функционирования сети на заданном интервале управления, тогда управление $\bar{\bar{n}}^*$, максимизирующее эффективность, называется оптимальным. Задача оптимального управления для НМ-сети состоит в поиске оптимального управления:

$$E(\bar{\bar{n}}^*) = \max_{\bar{\bar{n}}} E(\bar{\bar{n}}). \tag{1}$$

В качестве $E(\bar{\bar{n}})$ мы предлагаем взять общий суммарный ожидаемый доход НМ-сети, который можно найти, используя ожидаемые доходы систем сети, удовлетворяющие полученным в [1] системам разностно-дифференциальных уравнений. В докладе рассматриваются различные методы решения задачи (1).

Список литературы

1. *Маталыцкий М.А., Колузаева Е.В.* Марковские сети массовго обслуживания произвольной топологии с доходами // Докл. НАН РБ. 2009. Т. 53. № 1. (в печати).

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. Метельский

Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь
ametelski@bntu.by

Пусть исследуемая система (назовем ее Σ) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Dx(t) + D_1x(t-h) + D_2\dot{x}(t-h) + bu(t), t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in H^- = [-h; 0]. \tag{2}$$

Здесь $x = \mathrm{col}(x_1; x_2)$ — 2-вектор-столбец фазовых переменных абсолютно непрерывного решения уравнения (1); $0 < h$ — постоянное запаздывание; $D = (d_{ij}), D_1 = (d_{ij}^1), D_2 = (d_{ij}^2)$ $(i, j = \overline{1,2})$ — постоянные 2×2 -матрицы; b — постоянный 2-вектор-столбец; допустимое управление $u(t), t \in T = [0; t_1]$, — суммируемая с квадратом функция, где $0 < t_1$ — достаточно большой фиксированный момент времени (можно взять $t_1 \geq 2h$). Начальные функции φ считаем абсолютно непрерывными: $\varphi \in D^2$, где $D^2 = D^2[-h; 0]$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций с нормой $\|\varphi\|_{D^2} = |\varphi(-h)| + \int\limits_{-h}^{0} |\dot{\varphi}(s)|ds$, где $|\cdot|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Обозначим

$$W(\lambda) = \lambda E - D - D_1\mu - D_2\lambda\mu,\ \mu = e^{-\lambda h},$$

характеристическую матрицу уравнения (1). Здесь E — единичная матрица, $\lambda \in \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Критерий полной управляемости системы Σ нейтрального типа второго порядка выражает [1] следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы система Σ была полностью управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно:*

1) $\mathrm{rank}\,[W(\lambda), b] = 2\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$; (3)

2) $\mathrm{rank}\,[b, D_2] = \mathrm{rank}\,[b, D_2 b]$. (4)