Далее предполагается, что отображения $f : R^d \to R^d$, $g : R^d \to R^{d\times d}$, измеримы по Борелю, локально ограниченны, компоненты функций $f(t,x)$, $\sigma(t,x) = g(t,x)g^\top(t,x)$ удовлетворяют условию C), для стохастического дифференциального уравнения (1) выполнено

Условие L). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \to R_+$ такая, что $\forall x \in R^d$

$$BV(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} g(x) g^\top(x)\right) \le 0.$$

Положим $M_V = \{x \in R^d | \ BV(x) = 0\}$. Скажем, что слабое решение $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ принадлежит множеству M_V, если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} f(x(t)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} g(x(t)) g^\top(x(t))) = 0$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$.

Теорема 1. *(о глобальной асимптотической устойчивости по вероятности). Пусть функция $V(x)$ положительно определенная. Тогда нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, множество M_V не содержит ненулевых слабых решений, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПО СМЕШАННОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

А.В. Лубочкин

Гомельский госуниверситет им. Ф.Скорины, математический факультет

Советская 104, 246699 Гомель, Беларусь

lubochkin@gsu.by

Предлагается конструктивный метод решения задачи оптимального управления со смешанным критерием качества, составленным из двух критериев (быстродействие и минимум энергии). Задача рассматривается в классе дискретных управлений. Тогда построение ее программного решения можно свести к решению задачи квадратичного программирования, которой эквивалентна исходная задача при фиксированной продолжительности процесса управления, если его дополнить оптимизацией по этой продолжительности. Последнюю можно осуществить направленным перебором (с выбранным тактом). На основе этого решения строится метод реализации оптимальной обратной связи в режиме реального времени. Задачи подобного типа можно использовать для стабилизации динамических систем.

Рассмотрим задачу оптимального управления со смешанным критерием качества

$$J(t^*, u) = \alpha t^* + (1-\alpha)\int_0^{t^*} u^2(t)\,dt \to \min_{t^*,\,u(\cdot)}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \qquad (1)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T(t^*) = [0, t^*],$$

где $x = x(t) \in R^n$ — состояние объекта управления в момент времени t; $u = u(t) \in R$ — значение управляющего воздействия в этот же момент; $x_0 \in R^n$ — начальное состояние; $b \in R^n$, $g \in R^m$, $A \in R^{n\times n}$, $H \in R^{m\times n}$ — постоянные векторы и матрицы, $\mathrm{rank}\, H = m \le n$; $\alpha \in]0,1[$ — заданный параметр; L — заданное число.

Задачу (1) можно рассматривать в различных классах управляющих воздействий. Традиционно используется класс кусочно-непрерывных функций (предельным для задачи (1) является класс непрерывных, кусочно-гладких функций [1]). Здесь задачу (1) будем рассматривать в классе дискретных функций (часто этого достаточно на практике). Дискретным управляющим воздействием (с периодом квантования $\nu > 0$) назовем кусочно-постоянную функцию вида $u(t) = u(\tau_j) \equiv u_j$, $t \in [\tau_j, \tau_j + \nu[$, $\tau_j = j\nu$, $j = 0, 1, \ldots$.

Программным решением задачи (1) назовем пару $\{t^*, u^0\}$, состоящую из таких момента

$$t^* = t^*(0, x_0) \tag{2}$$

и функции (оптимальной программы)

$$u^0(t) = u^0(t \,|\, 0, x_0), \quad t \in T(t^*) = T(t^*(0, x_0)), \tag{3}$$

что: 1) функция (3) удовлетворяет геометрическому ограничению: $|u^0(t)| \le L$, $t \in T(t^*)$; 2) соответствующая функции (3) траектория $x^0(t) = x^0(t \,|\, 0, x_0)$, $t \in T(t^*)$, системы (1) в момент (2) удовлетворяет терминальному ограничению: $Hx^0(t^*) = g$; 3) момент (2) и функция (3) доставляют минимум критерию качества задачи (1); 4) на множестве $T(t^*)$ управляющее воздействие (3) является дискретной функцией с периодом квантования ν.

Предлагаемый алгоритм построения программного решения задачи (1), а также алгоритм реализации оптимальной обратной связи в режиме реального времени, который, как известно, сводится к построению программных решений семейства задач

$$J_\tau(t^*, u) = \alpha\,(t^* - \tau) + (1 - \alpha) \int_\tau^{t^*} u^2(t)\,dt \to \min_{t^*,\, u(\cdot)}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \tag{4}$$

$$Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T_\tau(t^*) = [\tau, t^*]$$

(τ — время реального процесса управления; $x^*(t)$, $t \ge 0$ — реализующаяся траектория динамической системы, $x^*(0) = x_0$), основан на алгоритме из [2] и состоит в следующем. Выберем некоторый (фиксированный) момент t^* (так, чтобы приведенная ниже задача (5) при $k = 0$, $x^*(0) = x_0$ имела решение) и целочисленный параметр $N > 0$. Положим $\nu = t^*/N$ (параметр ν — такт работы регулятора — в дальнейшем изменяться не будет). В классе дискретных управлений $u(t) = u(j\nu) \equiv u_j$, $t \in [j\nu, (j+1)\nu[$, $j = \overline{0, N-1}$, при $k = 0$, $x^*(0) = x_0$ рассмотрим задачу

$$I_{k\nu}(u \,|\, N\nu) = \int_{k\nu}^{N\nu} u^2(t)\,dt \to \min_{u(\cdot)}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(k\nu) = x^*(k\nu), \tag{5}$$

$$Hx(N\nu) = g, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in [k\nu, N\nu].$$

Оптимальную программу задачи (5) можно построить двойственным методом квадратичного программирования [3] (используя формулу Коши, нетрудно сформулировать эквивалентную задачу квадратичного программирования). Затем, варьируя момент $t^* = N\nu$ с шагом ν (варьируя N на единицу) влево и вправо от первоначально выбранного значения и корректируя в связи с этим оптимальную программу задачи (5) (тем же двойственным методом), найдем такие момент t^* (значение N) и оптимальную программу $u^0_0(t) = u^0(t \,|\, 0, x_0)$, $t \in T(t^*)$ задачи (5), при которых критерий качества задачи (1) достигает минимального значения. Программное решение задачи (1) в выбранных условиях построено.

Работа регулятора по построению реализации оптимальной обратной связи в режиме реального времени заключается в следующем. Управление $u^*(t) = u^0_0(t)$, $t \in [0, \nu[$, подается на вход системы (1) и порождает ее состояние $x^*(\nu) = x^*(\nu \,|\, 0, x_0)$. Предположим, что регулятор проработал в моменты $0, \nu, \ldots, (s-1)\nu$, и система (1) оказалась в состоянии $x^*(\tau) = x^*(\tau \,|\, \tau - \nu, x^*(\tau - \nu))$, $\tau = s\nu$. В предыдущий момент $\tau - \nu = (s-1)\nu$, когда система находилась в состоянии $x^*(\tau - \nu) = x^*(\tau - \nu \,|\, \tau - 2\nu, x^*(\tau - 2\nu))$, регулятор уже решил задачу (4) при $\tau = (s-1)\nu$. На очередном шаге регулятору необходимо построить решение задачи (4) при $\tau = s\nu$. Для этого (аналогично описанному выше) строится оптимальная программа задачи (5) при $k = s$ и значении N, которое было найдено в результате решения задачи (4) при $\tau = (s-1)\nu$, с последующим варьированием N. В результате будут найдены момент t^* (значение N) и оптимальная программа $u^0_{s\nu}(t) = u^0(t \,|\, s\nu, x^*(s\nu))$, $t \in T_{s\nu}(t^*)$ задачи (5), при которых критерий качества задачи (4) достигает минимального значения. Это управление используется регулятором на промежутке времени $[s\nu, (s+1)\nu[$: $u^*(t) = u^0_{s\nu}(t)$, $t \in [s\nu, (s+1)\nu[$.

Работа описанного регулятора программно реализована на языке C++, просчитан ряд тестовых примеров.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч.4. Выпуклые задачи. Мн.: Университетское, 1987.
2. *Лубочкин А.В.* Дискретная реализация позиционного решения в линейно-квадратичной задаче с ограничениями // Изв. ГГУ им. Ф.Скорины. Гомель. 2003. № 3(18). С. 32–37.
3. *Ракецкий В.М.* Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом // Програм. обеспеч. ЭВМ. Вып. 55. Мн.: Ин-т матем. АН БССР. 1985. С. 124–129.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.И. Максимов

Институт математики и механики УрО РАН, С. Ковалевской 16, 620219 Екатеринбург, Россия
{maksimov}@uran.ru

В данном сообщении мы хотим обратить внимание на тот факт, что для исследования трех довольно разных по своей природе задач — задачи отслеживания эталонного движения, задачи игрового управления и задачи динамического восстановления входа - может быть использован единый подход, основанный на методе вспомогательных моделей [1–3]. Содержательно суть рассматриваемых задач состоит в следующем. На промежутке времени T фиксирована равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. Имеется некоторая система Σ. Ее решение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ $(x(t) \in H)$ зависит от изменяющегося во времени управления $u(\cdot)$ и неизвестного возмущения $v(\cdot)$. Функция $x(\cdot)$ также неизвестна. В моменты $\tau_i \in \Delta$ фазовое состояние $x(\tau_i)$ измеряется с ошибкой. Результаты измерений — элементы ξ_i^h, $i \in [0 : m-1]$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_H \le h.$$

Здесь $h \in (0,1)$ — величина информационной погрешности, H — гильбертово пространство.

Задача отслеживания эталонного движения. Предполагается, что $v = v(t) \equiv 0$, $t \in T$. Задано число $\varepsilon > 0$. Имеется эталонное движение $g(\cdot)$, описываемое тем же соотношением, что и Σ, в котором, однако, $v \equiv 0$, а $u = u^*(t)$. При этом как функция $u^*(\cdot)$, так и $g(\cdot)$ неизвестны. Известно лишь, что $u^*(t) \in D_*$ при п.в. $t \in T$, где D_* заданное множество. В моменты $\tau_i \in \Delta$ наряду с $x(\tau_i)$ измеряется (с ошибкой) состояние $g(\tau_i)$. Результаты измерений неточны. Требуется указать алгоритм формирования по принципу обратной связи управления $u = u(t) \in P$, $t \in T$, такой, что траектория Σ останется при всех $t \in T$ в равномерной ε-окрестности эталонного движения.

Задача робастного граничного управления. Пусть фиксированы P и Q — фиксированные множества. Заданы непустое множество N и число $\varepsilon > 0$. Требуется указать алгоритм формирования по принципу обратной связи управления $u = u(t) \in P$, $t \in T$,