СИММЕТРИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

И.В. Козьмин, А.П. Кукушкин

Институт математики и механики УрО РАН, Софьи Ковалевской 16, 620219 Екатеринбург, Россия
{ikozmin@imm.uran.ru}@mail.com, A.Kukuskin@imm.uran.ru

Постановка задачи. Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления движением точки в R^3 под действием управляющей силы, ограниченной по величине. Уравнения движения $m\ddot{q} = u$. Здесь m - масса точки, $q \epsilon R^3$ – положение, $u \epsilon R^3$– управление, ограниченное по величине: $\|u\| \leq 1$.

1. Приведенные начальные и конечные условия. В общем случае произвольную задачу можно свести к задаче с начальными условиями: $q^i = 0$, $\dot{q}^1 = 1$, $\dot{q}^2 = \dot{q}^3 = 0$. Возможны три варианта.
1) Когда скорость на обоих концах равна нулю, то решение тривиально: двигаемся по прямой половину времени ускоряясь, а вторую – замедляясь.
2) Если скорость в начальный момент не равна нулю, то, используя преобразования сдвига по координатам, повороты вокруг осей и растяжение, приводим задачу к вышеуказанному виду.
3) Если скорость в начальный момент равна нулю, а в конечный момент времени отлична от нуля, то применяем еще и дискретное преобразование - отражение по времени t.
После вышеуказанного приведения поворотом вокруг оси q^3 произвольные конечные условия можно свести к виду, когда значения по первым двум координатам имеют некоторое заданое значение $q^1(T)$, $q^2(T)$, а $q^3(T) = 0$.

2. Группа симметрий задачи. Понятие покомпонентной инвариантности задачи оптимального управления введено в работе [1]. Введены вспомогательные переменные (множители Лагранжа): постоянные $\psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_6)$, непрерывная и непрерывно-дифференцируемая вектор-функция $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая скалярная функция $\mu(t)$. Из условий покомпонетной инвариантности находится выражение для $\mu(t)$, а также общий вид функции $y(t) = c_{1i}t + c_{2i}$ Рассматриваемая задача оптимального управления покомпонентно инвариантна относительно действия группы Галилея [2], которая состоит из десяти преобразований:
Сдвиг по времени $t' = t + \sigma_0$, $\acute{q}^1 = q^1$, $\acute{q}^2 = q^2$, $\acute{q}^3 = q^3$.
Сдвиги по осям q^1: $t' = t$, $\acute{q}^1 = q^1 + \sigma_1$, $\acute{q}^2 = q^2$, $\acute{q}^3 = q^3$.
Сдвиг по оси q^2: $t' = t$, $\acute{q}^1 = q^1$, $\acute{q}^2 = q^2 + \sigma_2$, $\acute{q}^3 = q^3$.
Сдивг по оси q^3: $t' = t$, $\acute{q}^1 = q^1$, $\acute{q}^2 = q^2$, $\acute{q}^3 = q^3 + \sigma_3$.
Переход к подвижной системе координат.
По оси q^1: $t' = t$, $\acute{q}^1 = q^1 + \sigma_4 t$, $\acute{q}^2 = q^2$, $\acute{q}^3 = q^3$.
По оси q^2: $t' = t$, $\acute{q}^1 = q^1$, $\acute{q}^2 = q^2 + \sigma_5 t$, $\acute{q}^3 = q^3$.
По оси q^3: $t' = t$, $\acute{q}^1 = \acute{q}^1$, $\acute{q}^2 = q_2$, $\acute{q}^3 = q^3 + \sigma_6 t$.
Вращение вокруг осей координат q^1, q^2, q^3 соответственно.
$\acute{q}^1 = q^1$, $\acute{q}^2 = q^2 \cos\sigma_7 + q^3 \sin\sigma_7$, $\acute{q}^3 = -q^2 \sin\sigma_7 + q^3 \cos\sigma_7$.
$\acute{q}^1 = q^1 \cos\sigma_8 - q^3 \sin\sigma_8$, $\acute{q}^2 = q^2$, $\acute{q}^3 = q^1 \sin\sigma_8 + q^3 \cos\sigma_8$.
$\acute{q}^1 = q^1 \cos\sigma_9 + q^2 \sin\sigma_9$, $\acute{q}^2 = -q^1 \sin\sigma_9 + q^2 \cos\sigma_9$, $\acute{q}^3 = q^3$.
Очевидно, что все множество покомпонентно-инвариантных преобразований не исчерпывается группой Галилея. В качестве примера приведем преобразование растяжения $t = e^{\sigma_{10}} t$, $\acute{q}^1 = e^{2\sigma_{10}} q^1$, $\acute{q}^2 = e^{2\sigma_{10}} q^2$, $\acute{q}^3 = e^{2\sigma_{10}} q^3$. Для данных преобразований построены векторные поля и их продолжения [2].

3. Первые интегралы. Для каждого векторного поля построен первый инетграл [1]. Нетривиальными являются только инетгралы для сдвига по времени, вращения вокруг осей координат и растяжения.

$$
\begin{aligned}
N_{(0)} &= -P\,\|y\|\,/m + c_{11}\dot{q}^1 + c_{12}\dot{q}^2 + c_{13}\dot{q}^3 - \psi_0/m,\\
N_{(7)} &= (c_{12}t + c_{22})\,\dot{q}^3 - (c_{13}t + c_{23})\,\dot{q}^2 - c_{12}q^3 + c_{13}q^2,\\
N_{(8)} &= -(c_{11}t + c_{21})\,\dot{q}^3 + (c_{13}t + c_{23})\,\dot{q}^1 + c_{11}q^3 - c_{13}q^1,\\
N_{(9)} &= (c_{11}t + c_{21})\,\dot{q}^2 - (c_{12}t + c_{22})\,\dot{q}^1 - c_{11}q^2 + c_{12}q^1,\\
N_{(10)} &= \left(c_{11}\dot{q}^1 + c_{12}\dot{q}^2 + c_{13}\dot{q}^3\right)t + 2\left(c_{21}\dot{q}^1 + c_{22}\dot{q}^2 + c_{23}\dot{q}^3\right) - 2\left(c_{11}q^1 + c_{12}q^2 + c_{13}q^3\right) + P\,\|y\|\,t.
\end{aligned}
$$

Существование первых интегралов позволяет сократить число вспомогательных переменных в общем случае. В частных случаях, когда нужно прийти в заданную точку с произвольной скоростью и когда нужно прийти в конечную точку с нулевой скоростью [3], первые интегралы позволяют решить задачу аналитически. Динамика области достижимости для случая с произвольной конечной скоростью представлена на рис. 1.

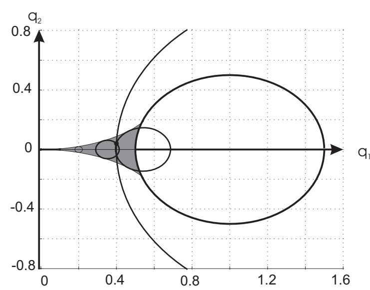

Рис. 1: Динамика области достижимости для свободных скоростей

На рис. 2 траектории 1-3 соответствуют частному случаю с произвольной конечной скоростью, а траектория 4 частному случаю с нулевой конечной скоростью.

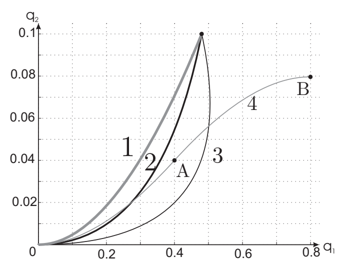

Рис. 2: Экстремали задачи в интегрируемых случаях

В настоящее время ведется работа по численному решению задачи в общем случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 06-01-00229.

Список литературы

1. *Кукушкин А.П.* Покомпонентная управляемость механических систем //Известия уральского государственного университета. 2003. Т26.
2. *Ибрагимов В.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.:Наука, 1983.
3. *Козьмин И.В.*Исследование двухточечной граничной задачи для управляемой системы с симметриями. //Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-ой Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. С. 326-330.