ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Р.И. Козлов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Лермонтова 134, 664033 Иркутск, Россия
kozlov@icc.ru

Обобщаются признаки асимптотической и экспоненциальной устойчивости, а также оценки областей притяжения в стандартном неотрицательном конусе $\bar{R}^n_+$ (порожденном покоординатной полуупорядоченностью) для систем автономных разностных уравнений

$$y(t+1) = f(y(t)), \;\; t = 0, 1, 2, ..., \;\; y \in \bar{R}^n_+. \tag{1}$$

с монотонно неубывающей правой частью $f : \bar{R}^n_+ \to R^n$, $f(0) = 0$ (ср. [1]). При самых общих предположениях относительно f даются необходимые и достаточные условия названных свойств; особое внимание при этом уделяется конструктивным результатам, приводящим к эффективно выполнимым процедурам анализа, и уточнению количественых оценок.

Например, для свойства экспоненциальной устойчивости формулируется следующий критерий, в котором кроме монотонности на правую часть никакие дополнительные требования не накладываются.

Пусть $f_{(m)}$ – m- кратная композиция функции f, $m \geq 1$, $\bar{f}_{(m)}(y) \equiv \sup\limits_{c \in (0,1]} (f(cy)/c)$, $E_m \equiv \{y \in \bar{R}^n_+ : \bar{f}_{(m)}(y) < y\}$, $S_-(E_m) \equiv \bigcup\limits_{y \in E_m} \langle 0, y\rangle$, где $\langle 0, y\rangle \equiv \{x \in R^n : 0 \leq x \leq y\}$ – конусный отрезок, соединяющий точки 0 и y.

Теорема 1. *Для экспоненциальной устойчивости системы* (1) *в конусе* $\bar{R}^n_+$ *необходимо и достаточно, чтобы* $E_m \neq \emptyset$ *при некотором целом* $m \geq 1$, *что эквивалентно существованию положительных направлений* $v \in \bar{R}^n_+$, *по которым верхняя производная Дини в нуле функции* $f_{(m)}$ *удовлетворяет неравенству* $\bar{f}'_{(m)}(v) \equiv \overline{\lim\limits_{c \to 0_+}} (f_{(m)}(cv)/c) < v$.

Если z - некоторая точка из E_m, для решений $y(t, y_0)$ с $y_0 \leq z$ имеет место экспоненциальная оценка

$$y(t, y_0) \leq L \max_i \left(\frac{y_0^i}{z^i}\right) e^{-\alpha t}, \; \alpha = -\frac{\ln \beta}{m} > 0,$$

$$\text{где } \beta \equiv \max_i \left(\frac{\bar{f}^i_{(m)}(z)}{z^i}\right) \;\; (i = \overline{1, n}), \; L \equiv \max_{k = \overline{1, m-1}} \{z; \beta^{-\frac{k}{m}} \bar{f}_{(k)}(z)\}.$$

Множество $\hat{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{m \geq 1} S_-(E_m)$ *является внутренней оценкой области притяжения* $\mathcal{A}$, *а в случае, когда* f *полуоднородна* ($f(cy) \leq cf(y)$ *при* $c \in [0, 1]$), *полностью описывает* $\mathcal{A}$.

На примерах показывается, что традиционные признаки экспоненциальной устойчивости, основанные на "линеаризации", могут приводить к очень грубым результатам. Само же свойство устойчивости может быть негрубым по отношению к изменениям правой части какого угодно "порядка малости" (по крайней мере для разрывных систем).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 08-08-90425 УКР а) и Гранта Президента РФ НШ-1676.2008.1.

Список литературы

1. *Козлов Р.И.* Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. Новосибирск: Сибирская издательская фирма "Наука" РАН, 2001.