2. Оптимальное управление механическими системами в вязкой среде. Исследовались законы движения тел и составленных из них механических систем, обеспечивающих заданные перемещения с наименьшими затратами энергии на преодоление сопротивления среды. Задача поиска законов изменения управляющих сил и моментов, обеспечивающих перемещение мобильных манипуляционных роботов (ММР) из начального положения за заданное время с минимальными энергетическими затратами имеет так называемые сингулярные решения с импульсными составляющими. Следовательно, во-первых, классические вариационные средства непосредственно не применимы для их отыскания. Во-вторых, возникает проблема подсчета энергетических затрат. Для ее решения требуется найти корректный способ умножения импульсных управляющих воздействий на разрывные реализации скоростей звеньев ММР.

Перечисленные выше результаты отражены в монографиях [1-3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 06-01-00445.

Список литературы

1. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука. 1991. 256 с.
2. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. 256p.
3. *Завалищин Д.С., Завалищин С.Т.* Динамическая оптимизация обтекания. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 224 с.

СОГЛАСОВАННОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ СПЕКТРА

В.А. Зайцев

Удмуртский госуниверситет, математический факультет, Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия
verba@udm.ru

Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \quad (t,x,u,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где матричные функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ кусочно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши соответствующей однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Пусть управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u = U(t)y$, где $U : \mathbb{R} \to M_{m,k}$ — ограниченная кусочно непрерывная функция. Система (1) перейдет в замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x. \tag{2}$$

В работе [1] было введено свойство согласованности для системы (1). Система (1) называется *согласованной на* $[t_0, t_0+\vartheta]$, если существует $l > 0$ такое, что для всякой $G \in M_n$ найдется кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0+\vartheta] \to M_{m,k}$ такое, что решение матричной задачи Коши $\dot{Z} = A(t)Z + B(t)U(t)C^*(t)X(t,t_0)$, $Z(t_0) = 0$ удовлетворяет условию $Z(t_0+\vartheta) = G$, при этом $|U(t)| \leqslant l|G|$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Свойство согласованности системы (1) является обобщением понятия полной управляемости для системы с наблюдателем. Если $C(t) \equiv I$, т.е. обратная связь полная: $u = U(t)x$, то согласованность системы (1) эквивалентна полной управляемости системы (1). На основе свойства согласованности в работах Е.Л. Тонкова, С.Н. Поповой, Е.К. Макарова был получен ряд результатов о локальной управляемости показателей Ляпунова системы (2), локальной достижимости и локальной ляпуновской приводимости системы (2) (см. обзор результатов в работе [2]).

Предположим, что система (1) стационарна:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x,u,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k. \tag{3}$$

Пусть матрица обратной связи в системе (3) также стационарна: $u = Ux$. Соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x. \tag{4}$$

Асимптотическое поведение системы (4) характеризуется спектром собственных значений матрицы $A+BUC^*$. Рассмотрим задачу о назначении спектра в системе (4). Будем говорить, что *задача о назначении спектра в системе (4) разрешима,* если для любого многочлена n-й степени $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i найдется постоянное матричное управление $U \in M_{m,k}$ такое, что характеристический многочлен $\chi(A+BUC^*;\lambda)$ матрицы системы (4) с этим управлением совпадает с заданным многочленом $p(\lambda)$. Известно, что в случае когда $C = I$, задача о назначении спектром разрешима тогда и только тогда, когда пара (A,B) вполне управляема, что в свою очередь эквивалентно согласованности системы (3). Известно также, что условие полной управляемости пары (A,B) и полной наблюдаемости пары (A,C^*) являются необходимыми условиями разрешимости задачи о назначении спектра в системе (4), а также необходимыми условиями согласованности системы (3). Е.Л. Тонковым был поставлен вопрос, будет ли свойство согласованности системы (3) эквивалентно разрешимости задачи о назначении спектра в системе (4). В работе [3] было показано, что в общем случае для произвольных матриц A, B, C ни одно из этих свойств не следует из другого. В данной работе установлены условия, при которых эти свойства будут эквивалентны между собой, и будут эквивалентны простому и эффективному условию на коэффициенты системы.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы (3) имеют следующий вид*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

$a_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1,n-1}$; $a_{ij} = 0$, $j > i+1$; $p \in \{1,\ldots,n\}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. Система (3) согласованна.

2. Задача о назначении спектра в системе (4) разрешима.

3. Матрицы C^*B, C^*AB, ..., $C^*A^{n-1}B$ линейно независимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

Список литературы

1. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
2. *Tonkov E.L.* Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
3. *Зайцев В.А.* Согласованность и управление показателями Ляпунова // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 1999. Вып. 2 (17). С. 3–40.