ОБОБЩЕННЫЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, ЭКЗОСТЕРЫ И КОЭКЗОСТЕРЫ В НЕГЛАДКОМ АНАЛИЗЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В.Ф. Демьянов

Санкт-Петербургский госуниверситет, факультет прикладной математики – процессов управления

Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект 35, 198504, Россия

vfd@ad9503.spb.edu

Негладкий анализ сформировался как самостоятельный раздел и непосредственное продолжение классического ("гладкого") анализа в 60–70-х годах XX столетия, хотя впервые негладкие задачи были поставлены и изящно решены еще П.Л.Чебышевым.

Исторически первыми глубоко изученными классами негладких функций (вначале в конечномерных пространствах) были классы выпуклых функций и функций максимума. Исследование этих функций привело к развитию *выпуклого анализа* и *теории минимакса* (см., например, [1, 2]). При этом оказалось, что основным инструментом исследования указанных классов функций является субдифференциал (представляющий собой выпуклое множество в сопряженном пространстве), с помощью которого можно, в частности, вычислить производные по направлениям (и тем самым получить аппроксимацию первого порядка функции в окрестности заданной точки), сформулировать условия минимума, найти направления наискорейшего спуска и построить численные методы.

Упомянутые свойства субдифференциалов выпуклых функций и функций максимума привели к многочисленным попыткам найти подобный выпуклый объект и в невыпуклом случае. Различные обобщения понятия субдифференциала были предложены и исследованы. Среди наиболее удачных и популярных следует отметить, в первую очередь, субдифференциал Кларка (см. [3]), который представляет собой выпуклую оболочку субдифференциала Шора (см. [4]). Общая теория субдифференциалов в абстрактных пространствах построена в [5]. Однако, как отмечается в [5], от субдифференциала "мало прока, если нет достаточно эффективных средств его вычисления". В настоящем докладе для некоторых наиболее распространенных субдифференциалов в конечномерных пространствах строятся правила их вычисления. Это делается с помощью экзостеров (см., например, [6]).

Идея сведения задачи минимизации произвольной функции к последовательности выпуклых задач была воплощена Б.Н.Пшеничным [7], который ввел понятия верхней выпуклой и нижней вогнутой аппроксимаций (в.в.а. и н.в.а.). А.М.Рубинов в [8] предложил рассматривать исчерпывающие семейства в.в.а. и н.в.а. Впоследствии (см. [9, 10, 11]) были введены понятия верхнего и нижнего экзостеров, представляющие двойственные объекты и позволяющие свести исходную оптимизационную задачу к последовательности выпуклых задач минимизации.

С помощью экзостеров описываются условия экстремума [12].

В настоящем докладе изучается связь между экзостерами и некоторыми обобщенными субдифференциалами негладких функций. Понятие экзостера и некоторые его свойства описаны в [11]. В [13, 6] субдифференциалы Гато и Фреше для дифференцируемых по направлениям в смысле, соответственно, Дини и Адамара функций выражены в терминах экзостеров. Эти субдифференциалы были введены в работе [14] и изучены в [15, 16].

Устанавливается также связь с экзостерами субдифференциалов Мишеля-Пено [17]и Кларка [3]. (Связь между субдифференциалом Кларка и квазидифференциалами изучалась в [18]. Упомянутые выше субдифференциалы позволяют строить положительно однородные аппроксимации функционалов (первого порядка). Все эти субдифференциальные отображения (как функции точки) по существу разрывны в метрике Хаусдорфа. Для построения непрерывных аппроксимаций первого и более высокого порядков введены понятия кодифференциала k-го порядка и коэкзостера (см. [11]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект РФФИ N 06-01-00276.

Список литературы

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М: Наука, 1972.
3. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
4. *Шор Н.З.* О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // Кибернетика. 1972. N 4. С. 65–70.
5. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992.
6. *Демьянов В.Ф., Рощина В.А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры в негладком анализе // Доклады РАН. 2007. Т. 416, N 1, С. 18–21.
7. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука. 1980.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Элементы квазидифференциального исчисления // "Негладкие задачи теории оптимизации и управления"под ред. В.Ф.Демьянова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1982. С. 5–127.
9. *Demyanov V.F.* Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45. P. 13-29.
10. *Demyanov V.F. and Rubinov A.M.* Exhaustive families of approximations revisited // In: R.P.Gilbert, P.D.Panagiotopoulos, P.M.Pardalos (Eds.) From Convexity to Nonconvexity. Nonconvex Optimization and Its Applications. 2001. Vol. 55. P. 43-50. (Dordrecht: Kluwer Scientific Publishers).
11. *Demyanov V.F.* Exhausters and Convexificators – New Tools in Nonsmooth Analysis // In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 85–137.
12. *Demyanov V.F., Roschina V.A.* Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters // Optimization. 2006. Vol. 55, N 5/6, p. 525–540.
13. *Roshchina V.* On the relationship between the Fréchet subdifferential and upper exhausters // International Workshop on Optimization: Theory and Algorithms. 19–22 August 2006, Zhangjiajie, Hunan, China.
14. *Bazaraa, M.S., Goode, J.J., Nashed M.Z.* On the Cones of Tangents with Applications to Mathematical Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 13. No. 4. P. 389–426.
15. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука,–1988.–360 с.
16. *Kruger, A. Ya.* On Fréchet subdifferentials // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). 2003. Vol. 116, No. 3. P. 3325–3358.
17. *Michel, P. and Penot, J.-P.* Calcus sous-differential pour les fonctions lipschitzienness et non-lipschitziennes // C.R. Acad. Sc. Paris, ser. I. 1984. Vol. 298. P. 269–272.
18. *Демьянов В.Ф.* О связи между субдифференциалом Кларка и квазидифференциалом // Вестник Ленинградского ун-та. 1980. N 13, С. 18–24.

ПРИНЦИП ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Н.М. Дмитрук[1], К.В. Шилкина[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
dmitruk@im.bas-net.by

[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
ksenia_shilkina@rambler.ru

На промежутке $T = [t_*, t^*]$ рассмотрим группу из q объектов управления, считая, что математическая модель i-го ($i \in I = \{1, 2 \ldots, q\}$) объекта имеет вид

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j \in I \setminus i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I \setminus i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_*) = x_{i0}. \tag{1}$$

Здесь $x_i = x_i(t) \in R^{n_i}$ — состояние i-ой математической модели в момент времени t; $u_i = u_i(t) \in U_i$ — значение дискретного [1] управляющего воздействия в момент t; $U_i = \{u \in R^{r_i} : u_{i*} \leq u \leq u_i^*\}$ — ограниченное множество доступных значений i-го управляющего воздействия. В (1) функция $A_i(t)$, $t \in T$, характеризует собственную динамику i-ой