$\Delta\alpha$ есть не что иное, как максимально допустимая ширина каждого из n-симметричных импульсов. На вход 2 подается характеристика $\lambda(t)$, представляющая собой зависимость ширины симметричного импульса от времени моделирования. На выходе 1 получаем искомое количество симметричных импульсов $q$, ширина которых изменяется по соответсвующему закону в заданном временном промежутке. После синхронизации сформированных симметричных импульсов с синусоидой сетевого напряжения для каждой фазы на выходе регулятора имеем импульсную кривую напряжения.

**3. Результаты гармонического анализа импульсной кривой напряжения.** Исследования показали, что при переходе к импульсному регулированию напряжения наблюдается значительное улучшение гармонического состава выходной кривой регулятора напряжения по сравнению фазовым регулированием. При возрастании количества импульсов амплитуды высших гармоник напряжения уменьшаются. Уже при одном симметричном импульсе амплитуды 3-ей, 5-ой, 7-ой, 9-ой, 11-ой, 13-ой гармоник напряжения фазы А уменьшились соответственно на 20%, 15%, 8%, 6%, 5%, 4% по сравнению с фазовым регулированием напряжения. Более подробно результаты сравнения импульсного и фазового регулирования представлены в [1].

Представленные методы импульсного формирования кривой выходного напряжения при изменении ширины и числа симметричных импульсов рационально использовать в системах управления регуляторов напряжения на основе полностью управляемых полупроводниковых элементов (например, транзисторов), в качестве альтернативы распространенному в настоящее время фазовому регулированию величины первой гармоники напряжения.

### Список литературы


1. *Фираго Б.И., Павлячик Лешек, Васильев Д.С.* Регулирование напряжения асинхронного двигателя импульсными методами для мягкого пуска и торможения // Материалы 2-ой международной НТК "Организационно-техническое управление в межотраслевых комплексах". Мн.: БГТУ, 2007. С. 213-220.


## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ


**Э.В. Вдовина**

Уральский государственный университет, Ленина 51, 620083 Екатеринбург, Россия
vdovina@e1.ru


Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений даёт возможность изучать свойства решений автономной системы без её интегрирования, в частности, по фазовому портрету. Но даже для автономных систем II порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

портреты, как правило, исследуются и строятся в конечной части плоскости.

Рассмотрим поведение фазовых траекторий на $\infty$ с помощью сферы Пуанкаре [1] и исследуем фазовые портреты в круге Пуанкаре для следующих систем:
I. Системы, в которых функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — однородные относительно $x$, $y$ размерности $m$.

$$1)\ \text{при}\ \ m=1 \qquad \begin{cases} \dot{x} = a_0x + a_1y, \\ \dot{y} = b_0x + b_1y, \end{cases} \tag{2}$$

$$2)\ \text{при}\ \ m=2 \qquad \begin{cases} \dot{x} = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2, \\ \dot{y} = b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2. \end{cases} \tag{3}$$

II. Системы, представляющие собой решение II обратной задачи качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. обладающие заданными предельными циклами заданного характера устойчивости [2].

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} + a\dfrac{\partial F}{\partial x}F, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} + b\dfrac{\partial F}{\partial y}F, \end{cases} \tag{4}$$

где $F(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x^2 + y^2 - r_i)$, $r_i$ — $const$ и $x^2 + y^2 = r_i$ — окружности, являющиеся предельными циклами.

При переходе к кругу Пуанкаре делаем замену $X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ и система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sqrt{1 - X^2 - Y^2}\left[(1 - X^2)Q(X,Y) - XYP(X,Y)\right], \\ \dot{Y} = \sqrt{1 - X^2 - Y^2}\left[(1 - Y^2)P(X,Y) - XYQ(X,Y)\right]. \end{cases}$$

Система (2) — линейная однородная с постоянными коэффициентами, классификация ее фазовых портретов рассматривается в классических учебниках по теории дифференциальных уравнений. Для неё имеют место следующие случаи. (0,0) — узел, имеем на круге Пуанкаре 4 положения равновесия: 2 устойчивых узла и 2 седла. (0,0) — седло, имеем на круге Пуанкаре 4 положения равновесия: 2 устойчивых и 2 неустойчивых узла. (0,0) — вырожденный узел, имеем 2 сложных положения равновесия: седло-узел. (0,0) — фокус, граница круга Пуанкаре — предельный цикл. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ — прямая из положений равновесия, на границе круга Пуанкаре 2 устойчивых (или неустойчивых) положения равновесия. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — фазовые траектории — прямые параллельные прямой из положений равновесия, на границе круга Пуанкаре 2 узла: устойчивый и неустойчивый.

Если рассмотреть уравнение $\dot{y} = 2$, интегральные кривые которого $y = 2x + C$ — параллельные прямые, то на границе круга Пуанкаре 2 особых точки — устойчивый и неустойчивый узлы. Итак, параллельные прямые на $\infty$ пересекаются!

Для системы (3) классификация фазовых портретов на основе теоремы Форстера получена в работе [3], разновидностей 7. При переходе в круг Пуанкаре положения равновесия на его границе определяются пересечением фазовых прямых, проходящих через начало координат с окружностью $X^2 + Y^2 = 1$. Их либо 2, либо 4, либо 6.

Для задачи (4) положения равновесия на границе круга Пуанкаре определяются системой: $\begin{cases} bXY^2 - aXY^2 = 0 \\ aX^2Y - bX^2Y = 0 \end{cases}$, их либо нет $(a = b)$, либо 4: $(0,1)$; $(0,-1)$; $(1,0)$; $(-1,0)$, не зависимо от числа, характера устойчивости и взаимного расположения предельных циклов.

## Список литературы


1. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
2. *Вдовина Э.В.* О второй обратной задаче качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. XIV. № 10. С. 1760–1764.
3. *Вдовина Э.В.* Классификация особых точек уравнения $y' = \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1}y + \ldots + a_my^m}{b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_my^m}$ методом Форстера // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XX. № 10. С. 1809–1813.