ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А.С. Андреев[1], С.В. Павликов[2]

[1] Ульяновский госуниверситет, Л. Толстого 42, 432000 Ульяновск, Россия
AndreevAS@ulsu.ru

[2] Камская государственная инженерно-экономическая академия,
Новый город, 49/20, Набережные Челны, Россия
mtu@ulsu.ru

В докладе представлен краткий обзор изложенных в монографиях [1, 2] результатов по исследованию устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным запаздыванием на основе функционалов Ляпунова.

Излагается применение полученных результатов в задачах об устойчивости установившегося движения эредитарной (наследственной или вязкоупругой) механической системы, рассмотренных еще в работах В. Вольтерра [3], о стабилизации управляемой механической системы с различными типами запаздывающих регуляторов [4]- [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00741).

Список литературы

1. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.
2. *Павликов С.В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. Набережные Челны: Изд-во Института управления, 2006. 264 с.
3. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
4. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
5. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
6. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 34–42.

ВЗАИМОСВЯЗЬ КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ ФРОБЕНИУСА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

А.И. Астровский

Белорусский государственный экономический университет,
Партизанский пр-т 26, 220070 Минск, Беларусь
a_i_astrov@tut.by

При изучении структурных свойств дискретных систем наблюдения важную роль играют канонические формы. Так как нахождение канонических форм для линейных дискретных систем в ряде случаев не представляет большого труда, то целесообразно рассмотреть дискретные уравнения, близкие в определенном смысле к дифференциальным и исследовать вопрос о связи канонических форм дискретных систем и непрерывных. В докладе установлены взаимосвязи между каноническими формами линейных нестационарных систем наблюдения, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, и каноническими формами их дискретных аналогов.

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-вектор-столбец состояния в момент t, а $(n{\times}n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор-функция строка $c(t)$ непрерывны на T. Изучим возможность преобразования пары (A,c) из Σ к системе наблюдения (A^0,c^0) в форме Фробениуса на основе разностной аппроксимации действия линейной нестационарной группы $\mathcal{G}$ класса C^1 на Σ. Для этого введем в рассмотрение множество $\Sigma_3 = \Sigma \times C(T,R^n)$, элементами которого являются тройки (A,c,v), где $(A,c) \in \Sigma$, $v = (v_1,v_2,...,v_n) \in C(T,R^n)$, и определим оператор $V:\Sigma_3 \to \Sigma_3$, действующий по правилу

$$V(A,c,v) = (A,\ \dot c + cA - v_1 p,\ \varphi[v]),\quad p(t) = c(t),\quad \varphi[v_1,v_2,...,v_{n-1},v_n] = (v_2,v_3,...,v_n,v_1).$$

Область определения $\mathcal{D}(V)$ оператора V состоит из (A,c,v) с непрерывно дифференцируемой на T функцией $c(t)$. Если n-вектор-функция $g(t) = \dot c(t) + c(t)A(t) - v_1(t)c(t)$ принадлежит $C^1(T,R^{n\times n})$, то на тройке (A,c,v) определен оператор V^2, для которого

$$V^2(A,c,v) = V(V(A,c,v)) = V(A,g,\varphi[v]) = (A,\ \dot g + gA - v_2 c,\ \varphi[\varphi[v]]).$$

По индукции можно определить любую степень V^k оператора V. Область определения оператора V^k обозначим $\mathcal{D}(V^k)$. Отметим, что множество $\mathcal{D}(V^n)$ не пусто. Например, для пары $(A,c) \in \mathcal{R}_n^0$ ($\mathcal{R}_n^0$ — множество равномерно наблюдаемых систем класса n с гладкими инвариантами) существует такое $v \in C_0^{n-1}(T,R^n)$, что тройка (A,c,v) принадлежит $\mathcal{D}(V^n)$. Здесь $C_0^{n-1}(T,R^n)$ — множество n-мерных функций, у которых первая компонента $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема, вторая — $(n-2)$ раза и т.д., а n-тая компонента — непрерывна.

Для установления взаимосвязи между каноническими формами линейных нестационарных систем наблюдения, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, и каноническими формами их дискретных аналогов рассмотрим на множестве $\mathcal{D}(V^n)$ уравнение

$$V^n(A,c,v)(t) = (A(t),\ 0,\ v(t)),\quad t \in T \tag{2}$$

и построим его разностную аппроксимацию.

Пусть $h > 0$ — шаг дискретизации. Положим

$$\tau_i = t_0 + ih,\quad i \in (0,1,...,M),\quad T_M = \{\tau_0,\tau_1,...,\tau_M\}.$$

Обозначим через $x^h(\tau)$ — n-вектор-функцию дискретных аргументов $\tau \in T_M$ и h, а множество всех таких функций с нормой

$$\|x^h\|_1 = \max_{\tau\in T_M} \|x^h(\tau)\|$$

обозначим через $\Omega_h(T_M)$.

Для каждого $h > 0$ заменим оператор $V(A,c,v)(t)$, $(A,c,v) \in \mathcal{D}(V)$ разностным оператором $V_h : \Sigma_h(T_{M-1}) \to \Sigma_h(T_M)$, действующим по правилу

$$V_h(A^h,c^h,v^h)(\tau) = (A(\tau),\ \frac{c(\tau+h)-c(\tau)}{h} + c(\tau)A(\tau) - v_1(\tau)p(\tau),\ \varphi[v(\tau)]).$$

При заданной паре $(A,c) \in \Sigma$ для $h > 0$ рассмотрим разностное уравнение

$$V_h^n(A^h,c^h,v^h)(\tau) = (A^h(\tau),\ 0,\ v^h(\tau)),\quad \tau \in T_{M-n}, \tag{3}$$

относительно v^h, $v^h \in \Omega_h(T_{M-n+1})$. Если при $h > 0$ разностное уравнение (3) имеет решение $v^h(\tau)$, $\tau \in T_{M-n+1}$, то с помощью этого решения образуем $(n{\times}n)$-матрицу $Q_h(\tau)$ из n-вектор-строк $g_k^h(\tau)$, $\tau \in T_{M-n+1}$, найденных по формулам:

$$g_{n-k}^h(\tau) = h^{-1}[g_{n-k+1}^h(\tau+h) - g_{n-k+1}^h(\tau)] + g_{n-k+1}^h(\tau)A(\tau) - v_k^h(\tau)c(\tau), \tag{4}$$

где $k \in (1,2,...,n-1)$ и $g_n^h(\tau) = c(\tau)$.

Следующее утверждение устанавливает связь между разрешимостью разностного уравнения (3) и существованием канонической формы Фробениуса для пары (A,c).

Теорема 1. *Пусть для пары* (A,c) *из* Σ *существуют такие числа* $h^0 > 0$ *и* $\gamma > 0$, *что при всех* $h < h^0$ *разностное уравнение (3) имеет равномерно сходящееся в себе решение* $v^h(\tau)$, $\tau \in T_{M-n+1}$, *для которого n-вектор-строки* $g_k^h(\tau)$, $\tau \in T_{M-n+1}$, $k \in (1,2,...,n-1)$, *построенные по формулам (4), также равномерно сходятся в себе и* $\det\ Q_h(\tau) > \gamma$ *для всех* $\tau \in T_{M-n+1}$ *и* $h < h^0$. *Тогда пара* (A,c) *обладает канонической формой Фробениуса* (A^0, c^0), *которая определяется функциями*

$$\alpha_{n-j}(t) = \lim_{h\to 0,\ \tau\to t} v_j^h(\tau),\ j \in (1,2,...,n),\ t \in T.$$

Из теоремы 1 вытекает, что последовательность разностных операторов V_h^n аппроксимирует на любом элементе $(A,c,v) \in \mathcal{D}(V^n)$ оператор V^n:

$$\lim_{h\to 0} \|V_h^n(A^h, c^h, v^h) - [V^n(A,c,v)]_h\|_3 =$$

$$= \lim_{h\to 0} \max_{\tau\in T_{M-1}} \|h^{-1}(q_1^h(\tau+h) - q_1^h(\tau)) + q_1^h(\tau)A(\tau) - \dot{q}_1(\tau) + q_1(\tau)A(\tau)\| = 0.$$

В докладе приводятся условия разрешимости разностного уравнения (3) и алгоритм построения его решения $v^h(\tau)$ при заданной паре (A,c).

Список литературы

1. *Астровский А.И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Мн.: МИУ, 2007.
2. *Астровский А.И.* Канонические формы лиейных нестационарных систем наблюдеия и хессенбергова наблюдаемость // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 4. С. 439–442.

ВНЕШНИЕ ОЦЕНКИ И СТУПЕНЧАТАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Л.Т. Ащепков

Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690066, Владивосток, Россия
ltas @iam.dvo.ru

Рассматривается обобщение классической проблемы управляемости — возможность перевода пучка траекторий системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами за заданное время из начального бруса на терминальный брус с помощью кусочно-постоянных управлений с фиксированными моментами разрыва и значениями из заданного многогранного множества.

Предварительно строится система обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-линейными правыми частями для двусторонней оценки фундаментальной матрицы решений. На примере показано, что оценки фундаментальной матрицы в общем случае не улучшаемы. Они становятся точными, если коэффициенты однородного уравнения неотрицательны. Внешняя оценка сечения пучка траекторий в фиксированный момент времени представляет собой брус в фазовом пространстве системы, построенный с помощью решений кусочно-линейной системы. Внешнюю оценку можно трактовать как обобщение на многомерный случай известной двусторонней оценки Чаплыгина для решений скалярных дифференциальных уравнений.

Требование принадлежности внешней оценки минимальной окрестности терминального бруса формулируется в виде задачи линейного программирования. Условие совпадения минимальной окрестности с терминальным брусом есть достаточное условием управляемости системы. Если минимальная окрестность терминального бруса с ним не совпадает, то решение задачи линейного программирования определяет кусочно-постоянное управление, переводящее пучок траекторий системы в минимальную окрестность терминального бруса.

Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-012).