

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дж. Э. Аллахвердиев

Институт кибернетики НАН Азербайджана, Ф. Агаева 9, 1073 Баку, Азербайджанская Республика
al_jalal@mail.ru

Пусть B_1 и B_2 – банаховы пространства и A – оператор, действующий из B_1 в B_2 , т.е. $A \in [B_1, B_2]$, $\|A\|_{B_0}$ – норма оператора в подпространстве $B_0 \subset B_1$, т.е. $\|A\|_{B_0} = \sup_{x \in B_0, \|x\|=1} \|Ax\|_2$. Если существует $x_0 \in B_0$, $\|x_0\| = 1$, такой, что $\|A\|_{B_0} = \|Ax_0\|_2$, тогда будем говорить, что норма оператора A в B_0 достигается. Совокупность операторов, для которых норма в каждом подпространстве достигается, обозначим класс $\mathfrak{R}$.

Теорема 1. *Для любого оператора из класса $\mathfrak{R}$ существует последовательность элементов $\{x_i\}_{i=0}^\infty, \{y_i\}_{i=0}^\infty, \{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ таких, что*

$$Ax_i = y_i, \|x_i\| = 1, \|\varphi_i\| = 1, \varphi_i(Ax_i) = \varphi_i(y_i) = \alpha_i(A) (i = 1, \dots, \infty),$$

$$\varphi(y_k) = \delta_{ik}, \alpha_i(A) \leq \alpha_{i-1}(A),$$

$L_i \subset L_{i-1}$ при $i = 1 \dots \infty$.

Элементы $\{\varphi_1, x_1\}, \dots, \{\varphi_n, x_n\}, \dots$ будем называть главными элементами, а $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots$ – положительными и отрицательными главными числами оператора A . $L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_{n-1}$, где

$$L_1 = \{x : \varphi_1(Ax) = 0\}, \dots, L_k = \{x : \varphi_i(Ax) = 0, i = 1, \dots, k-1\}.$$

Устанавливаются условия, при которых операторы из класса $\mathfrak{R}$ становятся вполне непрерывными и конечномерными.

Список литературы

1. Аллахвердиев Дж.Э. О скорости приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами // Ученые записки АГУ. 1957. № 4.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

ОПТИМАЛЬНАЯ БИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В СЕПЕРАБЕЛЬНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дж.Э. Аллахвердиев, Дж.Дж. Аллахвердиева

Институт кибернетики НАН Азербайджана, Ф. Агаева 9, 1073 Баку, Азербайджанская Республика
al_jalal@mail.ru

Построим биортогональную систему в банаховом пространстве следующим образом.

Пусть B – сепарабельное пространство. Согласно следствию теоремы Хана-Банаха, для каждого $x_0 \in B$ существует функционал $\varphi_{x_0}(x)$ такой, что

$$\|\varphi_{x_0}\| = 1, \varphi_{x_0}(x_0) = \|x_0\|.$$

Возьмем произвольный элемент $x_1 \in B$. Пусть $\varphi_1(x)$ функционал $\varphi_1 \in B^*$, построенный для элемента x_1 . Рассмотрим $B_1 = \{x : \varphi_1(x) = 0\}$ и выберем $x_2 \in B_1, \|x_2\| = 1$. Согласно той же теореме Хана-Банаха, существует функционал $\varphi_2 \in B^*$ такой, что

$$\varphi_2(x_2) = \|x_2\|, \|\varphi_2\| = 1.$$

Рассмотрим $\mathbf{B}_3 = \{x : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0\}$ и выберем $x_3 \in \mathbf{B}_3, \|x_3\| = 1$. Согласно теореме Хана-Банаха, существует функционал $\varphi_3 \in \mathbf{B}^*$ такой, что

$$\|\varphi_3\| = 1, \varphi_3(x_3) = \|x_3\|.$$

Пусть, продолжая этот процесс, получена система $(x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2), \dots, (x_{n-1}, \varphi_{n-1})$ такая, что $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$. Рассмотрим $\mathbf{B}_n = \{x : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_{n-1}(x) = 0\}$ и возьмем $x_n \in \mathbf{B}_n, \|x\| = 1$. Согласно теореме Хана-Банаха, существует $\varphi_n(x)$ такой, что

$$\|\varphi_n\| = 1, \varphi_n(x_n) = \|x_n\|.$$

Ясно, что если $\mathbf{B}$ бесконечномерное пространство, то при каждом n $\mathbf{B}_n$ также будет бесконечномерным пространством.

Пусть теперь $\mathbf{B}$ пространство Гильберта. Тогда согласно теореме Рисса $\varphi_1(x_1) = (x, y_1)$ из $\|\varphi_1\| = 1$ следует $\|y_1\| = 1$, а из $\varphi_1(x_1) = \|x_1\|$ следует, что $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Отсюда методом индукции получим, что $\varphi_{n-1}(x) = (x, y_{n-1})$, где $y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{\|x_{n-1}\|}$, и следовательно, $(x_i, y_j) = (x_i, x_j), (x_i, x_k) = \delta_{ik}$, т.е. построенная таким образом система в гильбертовых пространствах превращается в ортонормированную систему. Поэтому такую систему в банаховом пространстве назовем оптимально-биортогональной системой.

Список литературы

1. *Аллахвердиев Дж.Э.* Об одном классе непрерывных операторов в банаховом пространстве // Доклады НАНА. 2006. № 5–6.

ОСОБЫЕ ПРОГРАММЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.В. Альсевич

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Беларусь
alsevichvv@mail.ru

В докладе рассматривается следующая задача:

$$J(u) = \varphi(x(\tau_1), x(\tau_2), \dots, x(\tau_k)) \longrightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(x(t), x(\nu(t)), u(t), t), \quad t \in T = [t_0, t^*], \quad (2)$$

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in T^0 = [\nu(t_0), t_0], \quad x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (4)$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^r, t \in T; \nu(t) = t - h(t); h(t), t \in T$, — непрерывно дифференцируемая функция; $x_0(t), t \in T^0$, — непрерывная функция; вектор $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и множество $U \subset \mathbf{R}^r$ заданы; моменты t_0, t^* фиксированы; функции $\varphi(z), f(x, y, u, t)$ непрерывны по своим аргументам вместе с $\partial\varphi/\partial z, \partial f/\partial x, \partial^2\varphi/\partial z^2, \partial^2 f/\partial x^2, z = (z_1, z_2, \dots, z_k), z_i = x(\tau_i), i = \overline{1, k}, t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = t^*, y(t) = x(\nu(t))$.

Задача подобного типа с терминальным критерием качества рассмотрена в [1], с критерием качества (1) для обыкновенных систем — в [2]. В силу ограниченности размера тезисов и громоздкости результатов для общего случая функции $h(t), t \in T$, приведём условия оптимальности особых программ для задачи (1)–(4) только в случае, когда $\dot{h}(t) < 1, t \in T$. Тогда функция $\tau = \nu(t), t \in T$, строго возрастающая и для неё существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $t = r(\tau)$.

Пусть $\{u^0(t), x^0(t)\}, t \in T$, решение задачи (1)–(4). Введём обозначения: $\delta_\omega = 1$, если $t \in \omega$; $\delta_\omega = 0$ — в противном случае, $H(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t), H(t) = H(x^0(t), y^0(t), \psi(t), u^0(t), t)$.