

References

1. Gamkrelidze R.V., Kharatishvili G.L. Extremal problems in linear topological spaces // J. Math. Systems Theory. 1967. V. 1. No. 3. P. 229–256.
2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Theory of extremal problems.(Russian). Moscow, 1974.
3. Tsintsadze Z. Optimal processes in smooth-convex minimization problems // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 148. No. 3. P. 399–480.
4. Tsintsadze Z. The Lagrange Principle of taking restrictions off and its application to linear optimal control problems in the presence of mixed restrictions and delays // Memoirs on DEMPH. 1997. V. 11. P. 105–128.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛЯПУНОВСКОГО ТИПА

Е.В. Аксеньюшкина

Байкальский университет экономики и права, ул. Ленина, 11, 664015 Иркутск, Россия
aks1@online.ru

Рассмотрим интегральную задачу ляпуновского типа [1]

$$\int_T g_0(u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (1)$$

$$\int_T g_i(u(t), t) dt = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$V = \{u \in L_\infty^r : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Представим задачу в дифференциальной форме, используя переменные

$$y_i = \int_{t_0}^t g_i(u(\tau), \tau) d\tau, \quad i = \overline{0, m}.$$

В результате получаем динамический вариант интегральной задачи (1)

$$\dot{y}_i(t) = g_i(u, t), \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{0, m},$$

$$y_0(t_1) \rightarrow \min, \quad y_i(t_1) = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad u \in V.$$

Пусть $Y \subset R^{m+1}$ - множество достижимости y - системы в момент времени t_1 (выпуклый компакт). В пространстве R^{m+1} переменных $y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ задача представляется в конечномерной форме

$$y_0 \rightarrow \min, \quad y_i = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad y \in Y. \quad (2)$$

Для численного решения этой задачи возьмем за основу метод параметризации целевой функции [2]. Приведем основные соотношения метода.

Пусть $y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$ - решение задачи (2). Образует функцию - свертку с параметром β

$$S(y, \beta) = (y_0 - \beta)^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - a_i)^2$$

и сформулируем вспомогательную задачу проектирования на множество Y

$$S(y, \beta) \rightarrow \min, \quad y \in Y. \quad (3)$$

Пусть $y(\beta) = (y_0(\beta), y_1(\beta), \dots, y_m(\beta))$ - решение этой задачи,

$$\beta_* = \min\{\beta : S(y(\beta), \beta) = 0\}$$

- минимальное β , при котором значение задачи (3) равно нулю.

Связь между задачами (2), (3) вполне очевидна:

$$y_i^* = y_i(\beta_*), \quad i = \overline{0, m}.$$

Для отыскания β_* строится последовательность β_l , $l = 0, 1, \dots$ с условиями

$$\beta_l \leq \beta_{l+1} \leq \beta_*, \quad \beta_l \rightarrow \beta_*, \quad l \rightarrow \infty.$$

Величина β_0 находится как значение простейшей задачи:

$$y_0 \rightarrow \min, \quad y \in Y, \quad \left(\int_T g_0(u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad u \in V \right).$$

Далее действует итерационная формула

$$\beta_{l+1} = \beta_l + \sqrt{S(y(\beta_l), \beta_l)}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Таким образом, исходная задача (2) сводится к последовательному решению задач (3) в рамках формулы пересчета (4).

Понятно, что эффективность метода в целом связана с возможностью "быстрого" решения β - задачи (3). Поэтому для нее разработан специальный метод решения, обладающий свойством нелокального улучшения по функционалу на каждой итерации.

Будем работать с β - задачей, записанной в виде

$$S(u) = \frac{1}{2} \langle y(t_1) - a, y(t_1) - a \rangle \rightarrow \min, \quad u \in V, \quad (5)$$

$$\dot{y} = g(u, t), \quad y(t_0) = 0.$$

Для пары управлений $u, v \in V$ с соответствующими траекториями $y(t, u), y(t, v)$ получено приращение функционала в виде

$$\Delta_v S(u) = \int_T \langle p(t, u, y(t, v)), \Delta_{v(t)} g(u(t), t) \rangle dt, \quad (6)$$

где вспомогательная вектор - функция p определяется соотношением

$$p(t, u, y) = y(t_1, u) - a + y - y(t, u).$$

Формула (6) позволяет организовать процедуру нелокального улучшения управления $u \in V$ на основе минимизирующего управления

$$u^*(p, t) = \arg \min_{w \in U} \langle p, g(w, t) \rangle.$$

Процедура улучшения:

- 1) сформируем управление $v^*(y, t) = u^*(p(t, u, y), t)$, $y \in R^{m+1}$, $t \in T$;
- 2) найдем решение $y(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^*(y, t), t), \quad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(y(t), t)$, $t \in T$.

Выходное управление $v(t)$ характеризуется соотношением $(y(t) = y(t, v))$

$$v(t) = \arg \min_{w \in U} \langle p(t, u, y(t, v)), g(w, t) \rangle$$

и согласно формуле (6) обеспечивает свойство улучшения: $\Delta_v S(u) \leq 0$.

Подчеркнем экономичность процедуры: вычислительные затраты на одно улучшение - одно интегрирование y - системы.

Список литературы

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979.
2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука, 1982.