

Проверяем, что

$$f(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1).$$

Таким образом, мы получили разложение $f(x)$ на 2 неприводимых множителя. Конец алгоритма.

Таким образом, мы здесь описали алгоритм разложения многочлена на множители над Z при условии, что мы знаем его корни в каком-то Q_p .

Литература

1. *Прасолов В.В.* Многочлены. Москва: МНЦМО 2003.
2. *Коблиц Н.* p -адические числа, p -адический анализ и дзета функции. М., 1982.
3. *Schikhof W.H.* Ultrametric calculus. An introduction to p -adic analysis. Cambridge University Press, 1984.
4. *Радына А.Я., Радына Я.В.* Элементарныя ўводзіны ў p -адычны анализ. Мн., 2006.

КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ И ВАЛЕНТНО-СИЛОВОГО ПОЛЯ

Е. А. Расюкевич

Для реализации механических моделей наноструктур с использованием конечных элементов в виде упругого отрезка и упругого угла, которые имитируют валентное и невалентное взаимодействие атомов [1], необходимо показать их соответствие моделям структурной химии и молекулярной спектроскопии. Это можно сделать, сравнив их матрицы жесткости и матрицы потенциальной энергии.

Сначала рассмотрим приближение поля центральных сил, понятие о котором возникает, если предположить, что вдоль отрезков, соединяющих атомы, направлены как силы, действующие между валентно связанными атомами так и остальными [2]. В качестве обобщенных координат используются изменения длин валентных и невалентных связей.

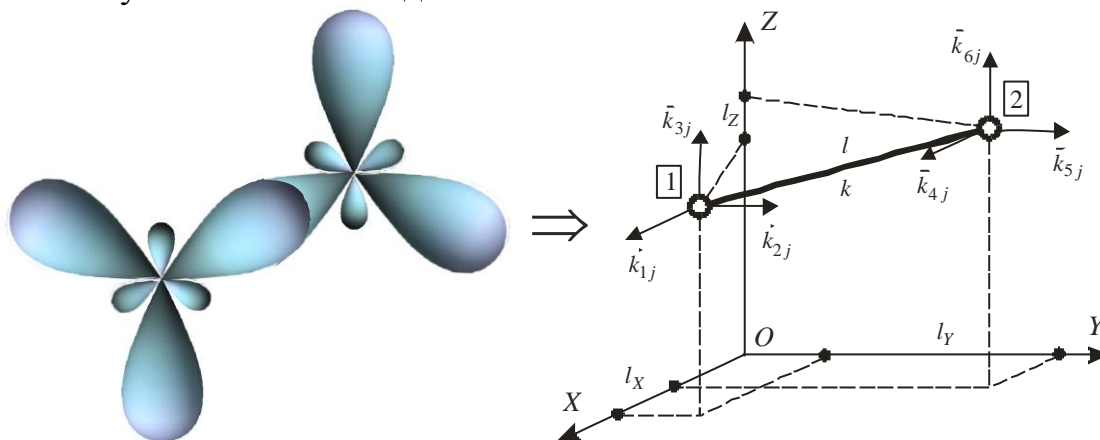


Рис. 1. Два атома и соответствующий упругий отрезок

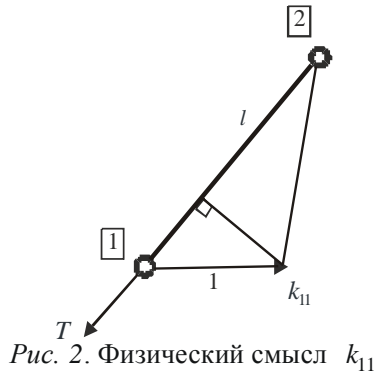


Рис. 2. Физический смысл k_{11}

Два атома с пересекающимися орбиталями представим в виде упругого отрезка (рис. 1) с длиной l , равной расстоянию между атомами в положении равновесия. Через k обозначена жесткость элемента (силовая постоянная связи). $\{\vec{k}_{ij}\}$, $j = \overline{1,6}$ – столбцы матрицы жесткости, уравновешенные системы сил, возникающие при единичных смещениях узлов j . Элементы матрицы жесткости должны удовлетворять условиям равновесия сил [3]:

$$\begin{aligned}
 OX : & \begin{cases} k_{1j} + k_{4j} = 0 \\ k_{2j} + k_{5j} = 0, \\ k_{3j} + k_{6j} = 0 \end{cases} & \begin{cases} k_{2j}l_Z - k_{3j}l_Y = 0 \\ k_{1j}l_Z - k_{3j}l_X = 0, \\ k_{1j}l_Y - k_{2j}l_X = 0 \end{cases} & j = \overline{1,6};
 \end{aligned} \tag{1}$$

условиям симметричности матрицы жесткости:

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{i+1,6}. \tag{2}$$

Согласно рис.2 постоянную k можно связать с элементом k_{11} матрицы жесткости:

$$k_{11} = \Delta T = T \cos \alpha = k \cos^2 \alpha. \tag{3}$$

Решая систему (1) – (3), получим матрицу жесткости рассматриваемого элемента

$$k = \frac{k}{l^2} \begin{bmatrix} l_X^2 & l_X l_Y & l_X l_Z & -l_X^2 & -l_X l_Y & -l_X l_Z \\ l_X l_Y & l_Y^2 & l_Y l_Z & -l_X l_Y & -l_Y^2 & -l_Y l_Z \\ l_X l_Z & l_Y l_Z & l_Z^2 & -l_X l_Z & -l_Y l_Z & -l_Z^2 \\ -l_X^2 & -l_X l_Y & -l_X l_Z & l_X^2 & l_X l_Y & l_X l_Z \\ -l_X l_Y & -l_Y^2 & -l_Y l_Z & l_X l_Y & l_Y^2 & l_Y l_Z \\ -l_X l_Z & -l_Y l_Z & -l_Z^2 & l_X l_Z & l_Y l_Z & l_Z^2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Построим матрицу потенциальной энергии $U = U(|\vec{R}_{12}|)$, где $|\vec{R}_{12}| = \sqrt{l_X + x_2 - x_1^2 + l_Y + y_2 - y_1^2 + l_Z + z_2 - z_1^2}$. Здесь $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – локальные координаты атомов, отсчитываемые от положения равновесия. Вычислим, например, по определению элемент

$$u_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = U'' \left| \vec{R}_{12} \right| \frac{l_X^2}{l^2}. \quad (5)$$

Он совпадает с k_{11} , если $k = U''(|\vec{R}_{12}|)$. Аналогично показывается совпадение остальных элементов из обеих матриц.

Модель валентно-силового поля основывается на гипотезе [2], что вдоль отрезка, соединяющего атомы, направлены только силы, действующие между валентно связанными атомами, а остальные силы ортогональны к связям. В качестве обобщенных координат используются изменения длин валентных связей и деформации различных углов между валентностями, образованных тройками атомов.

Для системы, изображенной на рис.3, выпишем условия равновесия ($j = \overline{1,9}$) [3]:

$$\begin{aligned} OX: & \begin{cases} k_{1j} + k_{4j} + k_{7j} = 0 \\ k_{2j} + k_{5j} + k_{8j} = 0, \\ k_{3j} + k_{6j} + k_{9j} = 0 \end{cases} & \begin{cases} k_{6j}l_{Y1} - k_{5j}l_{Z1} + k_{9j}l_{Y2} - k_{8j}l_{Z2} = 0 \\ k_{4j}l_{Z1} - k_{6j}l_{X1} + k_{7j}l_{Z2} - k_{9j}l_{X2} = 0, \\ k_{5j}l_{X1} - k_{4j}l_{Y1} + k_{8j}l_{X2} - k_{7j}l_{Y2} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

а так же условия ортогональности к сторонам угла равнодействующих сил, приложенных к узлам 2 и 3:

$$k_{4j}l_{X1} + k_{5j}l_{Y1} + k_{6j}l_{Z1} = 0, \quad k_{7j}l_{X2} + k_{8j}l_{Y2} + k_{9j}l_{Z2} = 0, \quad j = \overline{1,9}; \quad (7)$$

В соответствии с рис.4 запишем связь между k_{66} и жесткостью угла k_α :

$$\vec{r}_{12} \times \vec{k}_{46} + \vec{k}_{56} + \vec{k}_{66} = k_\alpha \Delta \vec{\alpha}. \quad (8)$$

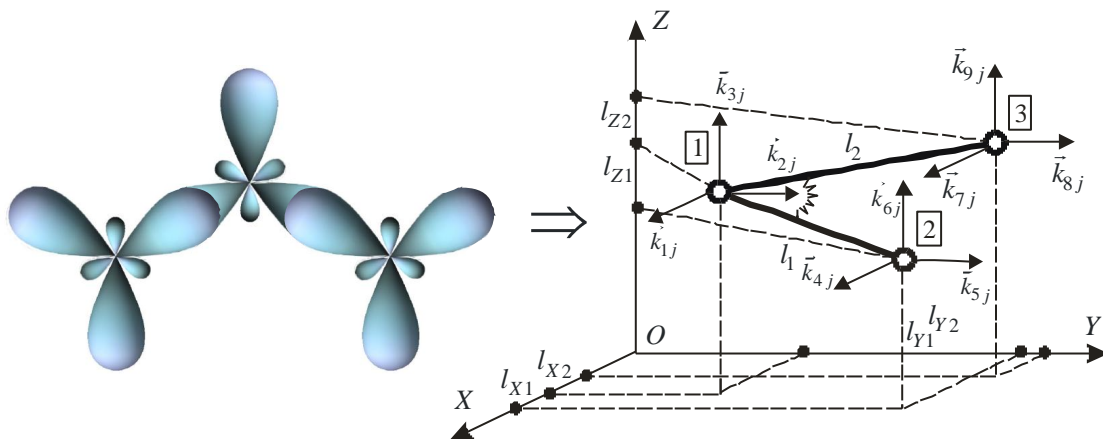


Рис. 3. Три атома и соответствующий упругий угол

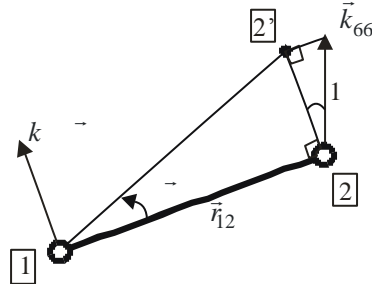


Рис. 4. Физический смысл k_{66}

Решая систему (6) – (8) с учетом того, что $k_{ij} = k_{ji}$, $i = \overline{1,8}$, $j = \overline{i+1,9}$ получим матрицу жесткости углового элемента

$$k_{\alpha} = \frac{k_{\alpha}}{A} \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_1 A_2}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_1 A_3}{l_1^4 l_2^4} & -\frac{A_1 A_4}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_1 A_5}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_1 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_1 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_1 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_1 A_9}{l_1^2 l_2^4} \\ \frac{A_1 A_2}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_2^2}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_2 A_3}{l_1^4 l_2^4} & -\frac{A_2 A_4}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_2 A_5}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_2 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_2 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_2 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_2 A_9}{l_1^2 l_2^4} \\ \frac{A_1 A_3}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_2 A_3}{l_1^4 l_2^4} & \frac{A_3^2}{l_1^4 l_2^4} & -\frac{A_3 A_4}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_3 A_5}{l_1^4 l_2^2} & -\frac{A_3 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_3 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_3 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_3 A_9}{l_1^2 l_2^4} \\ \frac{A_1 A_4}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_2 A_4}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_3 A_4}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_4^2}{l_1^4} & \frac{A_4 A_5}{l_1^4} & \frac{A_4 A_6}{l_1^4} & \frac{A_4 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_4 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_4 A_9}{l_1^2 l_2^2} \\ \frac{A_1 A_5}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_2 A_5}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_3 A_5}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_4 A_5}{l_1^4} & \frac{A_5^2}{l_1^4} & \frac{A_5 A_6}{l_1^4} & \frac{A_5 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_5 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_5 A_9}{l_1^2 l_2^2} \\ \frac{A_1 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_2 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_3 A_6}{l_1^4 l_2^2} & \frac{A_4 A_6}{l_1^4} & \frac{A_5 A_6}{l_1^4} & \frac{A_6^2}{l_1^4} & \frac{A_6 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_6 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_6 A_9}{l_1^2 l_2^2} \\ \frac{A_1 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_2 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_3 A_7}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_4 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_5 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_6 A_7}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_7^2}{l_2^4} & \frac{A_7 A_8}{l_2^4} & \frac{A_7 A_9}{l_2^4} \\ \frac{A_1 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_2 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_3 A_8}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_4 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_5 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_6 A_8}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_7 A_8}{l_2^4} & \frac{A_8^2}{l_2^4} & \frac{A_8 A_9}{l_2^4} \\ \frac{A_1 A_9}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_2 A_9}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_3 A_9}{l_1^2 l_2^4} & \frac{A_4 A_9}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_5 A_9}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_6 A_9}{l_1^2 l_2^2} & \frac{A_7 A_9}{l_2^4} & \frac{A_8 A_9}{l_2^4} & \frac{A_9^2}{l_2^4} \end{pmatrix},$$

где $A = l_1^2 l_2^2 - V^2$, $V = l_{X1} l_{X2} + l_{Y1} l_{Y2} + l_{Z1} l_{Z2}$, $A_1 = V l_2^2 l_{X1} + l_1^2 l_{X2} - l_1^2 l_2^2 \times$
 $\times l_{X1} + l_{X2}$, $A_2 = V l_2^2 l_{Y1} + l_1^2 l_{Y2} - l_1^2 l_2^2 l_{Y1} + l_{Y2}$, $A_3 = V l_2^2 l_{Z1} + l_1^2 l_{YZ} -$
 $- l_1^2 l_2^2 l_{Z1} + l_{Z2}$, $A_4 = l_{X1} l_{Y1} l_{Y2} + l_{Z1} l_{Z2} - l_{X2} l_{Y1}^2 + l_{Z1}^2$, $A_5 = l_{Y1} l_{X1} l_{X2} +$
 $+ l_{Z1} l_{Z2} - l_{Y2} l_{X1}^2 + l_{Z1}^2$, $A_6 = l_{Z1} l_{X1} l_{X2} + l_{Y1} l_{Y2} - l_{Z2} l_{Y1}^2 + l_{Y1}^2$, $A_7 = l_{X1} \times$

$$\times l_{Y2}^2 + l_{Z2}^2 - l_{X2} l_{Y1} l_{Y2} + l_{Z1} l_{Z2} , \quad A_8 = l_{Y1} l_{X2}^2 + l_{Z2}^2 - l_{Y2} l_{X1} l_{X2} + l_{Z1} l_{Z2} ,$$

$$A_9 = l_{Z1} l_{X2}^2 + l_{Y2}^2 - l_{Z2} l_{X1} l_{X2} + l_{Y1} l_{Y2} .$$

Сравнивая элементы полученной матрицы жесткости с соответствующими вторыми производными от потенциальной энергии системы $U = U(\alpha)$, где

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\left(\begin{array}{c} l_{X1} + x_2 - x_1 \quad l_{X2} + x_3 - x_1 + l_{Y1} + y_2 - y_1 \quad l_{Y2} + y_3 - y_1 \\ + l_{Z1} + z_2 - z_1 \quad l_{Z2} + z_3 - z_1 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \sqrt{l_{X1} + x_2 - x_1}^2 + l_{Y1} + y_2 - y_1}^2 + l_{Z1} + z_2 - z_1}^2 \times \\ \times \sqrt{l_{X2} + x_3 - x_1}^2 + l_{Y2} + y_3 - y_1}^2 + l_{Z2} + z_3 - z_1}^2 \end{array} \right)} \right) ,$$

констатируем совпадение обеих матриц, если положить $k_\alpha = U'' \alpha$.

Например:

$$u_{66} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2} = U'' \alpha \frac{l_{Z1} l_{X1} l_{X2} + l_{Y1} l_{Y2} - l_{Z2} l_{X1}^2 + l_{Y1}^2}{l_1^4 l_1^2 l_2^2 - l_{X1} l_{X2} + l_{Y1} l_{Y2} + l_{Z1} l_{Z2}^2} . \quad (9)$$

Литература

1. *Волькенштейн М. В.* Колебания молекул / М.В. Волькенштейн, М.А. Ельяшевич, Б.И. Степанов. М., 1972.
2. *Коптев Г. С.* Расчет колебаний молекул / Г.С. Коптев, Ю.А. Пентин. М., 1977.
3. *Репченков В. И.* Физические основы метода конечных элементов: Учеб. пособие для студентов механико-математического факультета / В.И. Репченков, Ю.Е. Нагорный. Минск, 2009.

УСЛОВИЯ ЦЕНТРА КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДИННАДЦАТЬЮ ПАРАМЕРАМИ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИИ

Т. В. Щеглова

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y \quad 1 + Dx + Px^2 + Hx^2 + Qx^3 \\ y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 \end{cases} \quad (1)$$

где $A, B, C, D, H, K, L, M, N, P, Q \in \mathbb{R}$. Точка $O(0,0)$ является особой точкой системы (1). Характеристическое уравнение системы в начале координат