ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОКТЯБРЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 10

УДК 517.937

Я. В. РАДЫНО

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. III. ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Настоящая работа является продолжением работ [1, 2]. Здесь даются примеры регулярных операторов, введенных в [1]. Общее построение, данное в § 1, показывает, что часто неограниченный оператор в банаховом пространстве можно рассматривать как регулярный оператор в подходящем локально выпуклом пространстве. В § 2 выделяются классы регулярных операторов в пространствах последовательностей.

Терминология и обозначения те же, что и в предыдущих работах. Если E — отделимое локально выпуклое пространство (л.в.п.), то $\operatorname{Spec} E$ — множество всех непрерывных полунорм на E, $\mathscr{L}(E)$ — алгебра непрерывных линейных отображений, действующих в E. Оператор $A \in \mathscr{L}(E)$ называем *регулярным*, если существует $M>0$ такое, что для $\forall p \in \operatorname{Spec} E$ $\exists q \in \operatorname{Spec} E$, для которых

$$p(A^n x) \leqslant M^n q(x) \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Число $\lambda \in \mathbf{C}$ называется спектральным значением регулярного оператора A, если $\lambda I - A$ не имеет обратного в множестве регулярных операторов. Множество спектральных значений образует спектр $\operatorname{sp} A$ оператора A. Спектральный радиус r_A оператора A вычисляется по формуле:

$$r_A = \sup_{\substack{p \in \operatorname{Spec} E \\ x \in E}} \overline{\lim} \sqrt[n]{p(A^n x)}.$$

§ 1. ОДНО АБСТРАКТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ

Пусть E — банахово пространство, $A: E \supset D(A) \to E$ — некоторый линейный неограниченный оператор. Предположим, что $D(A^\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \neq \{0\}$ (если A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы, то $\overline{D(A^\infty)} = E$).

Определение 1. Обозначим $\mathscr{H}_A(E)$ векторное пространство

$$\mathscr{H}_A(E) = \left\{ u \in D(A^\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \|A^n u\|_E < +\infty, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Топологию в $\mathscr{H}_A(E)$ определим полунормами

$$p_m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \|A^n u\|_E. \tag{1.1}$$

Векторное пространство $\mathscr{H}_A(E)$ с топологией, определяемой полунормами (1.1), будем называть пространством *A-голоморфных элементов из E*.

Предложение 1. *$\mathscr{H}_A(E)$ — пространство Фреше.*

Лемма 2. *Если $|t|<1$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\dots(n+1)t^n=\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Так как $(n+k)\dots(n+1)t^n=(t^{n+k})^{(k)}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\dots(n+1)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{n+k})^{(k)}=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+k}\right)^{(k)}=\left(\frac{t^k}{1-t}\right)^{(k)}.$$

Применяя формулу Лейбница, получим $\left(\frac{t^k}{1-t}\right)^{(k)}=\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$. Что доказывает лемму.

Предложение 2. *Оператор $A:\mathscr{H}_A(E)\to\mathscr{H}_A(E)$ непрерывен.*

Доказательство. Справедливо неравенство

$$p_m(Au)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}\|A^{n+1}u\|_E=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m}{m_1}\right)^n\frac{m_1}{n!}\|A^{n+1}u\|_E=$$

$$=\frac{1}{m_1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{m}{m_2}\right)^n\frac{m_1^{n+1}}{(n+1)!}\|A^{n+1}u\|_E=\frac{1}{m_1}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{m}{m_1}\right)^{n-1}\times$$

$$\times\frac{m_1^n}{n!}\|A^nu\|_E\leqslant\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{m}{m_1}\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_1^n}{n!}\|A^nu\|_E=$$

$$=\frac{m_1}{(m_1-m)^2}[p_{m_1}(u)-\|u\|_E]<\frac{m_1}{(m_1-m)^2}p_{m_1}(u)\ \text{для}\ m_1>m.$$

Определение 2. Будем говорить, что $u\in D(A^\infty)$ является элементом *A-экспоненциального типа τ*, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|A^nu\|_E}=\tau. \tag{1.3}$$

Множество элементов A экспоненциального типа, меньшего или равного τ, обозначим $\mathrm{Exp}_A(\tau)$.

Предложение 3. $\mathrm{Exp}_A(\tau)\subset\mathscr{H}_A(E)$.

Доказательство. Если $u\in\mathrm{Exp}_A(\tau)$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|A^nu\|_E}=\tau_1\leqslant\tau$, т. е. $\inf\limits_n\sup\limits_{k\geqslant n}\sqrt[k]{\|A^ku\|_E}=\tau_1$. Это означает, что для $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$, что $\sup\limits_{k\geqslant n_0}\sqrt[k]{\|A^ku\|_E}\leqslant\leqslant\tau_1+\varepsilon$. Отсюда имеем, что для $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$, что для всех $k\geqslant n_0$ $\|A^ku\|_E<<(\tau_1+\varepsilon)^k$. Поэтому $p_m(u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}\|A^nu\|_E<\sum\limits_{n=0}^{n_0}\frac{m^n}{n!}\|A^nu\|_E+e^{m(\tau+\varepsilon)}<<+\infty$.

Предложение 4. $\mathrm{Exp}_A(\tau)$ *замкнуто в* $\mathscr{H}_A(E)$ *в топологии, индуцированной из* $\mathscr{H}_A(E)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Exp}_A(\tau) \ni u_n \to u \in \mathscr{H}_A(E)$, следовательно, $u_n \to u$ в E и $A^k u_n \to A^k u$ в E для $\forall k$. Но отсюда следует, что $\|A^k u_n\|_E \to \|A^k u\|_E$. Так как $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k u_n\|_E} \leqslant \tau$ для всех n, то, переходя к пределу по n в этом неравенстве, получим $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau)$.

Предложение 5. $\mathrm{Exp}_A(\tau)$ *является пространством Фреше с топологией из* $\mathscr{H}_A(E)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathrm{Exp}_A(\tau)$ — векторное пространство. Очевидно, что множество

$$E_{\tau,\varepsilon}(A) = \{u \in D(A^\infty) : \|A^k u\|_E \leqslant (\tau+\varepsilon)^k C_\varepsilon(u), \quad \forall k\} \tag{1.4}$$

является векторным пространством для $\forall \varepsilon > 0$; $C_\varepsilon(u)$ — положительная константа, зависящая от u и ε. Докажем, что

$$\mathrm{Exp}_A(\tau) = \bigcap_{\varepsilon>0} E_{\tau,\varepsilon}(A). \tag{1.5}$$

Пусть $u \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} E_{\tau,\varepsilon}(A)$, значит, $\|A^k u\|_E \leqslant (\tau+\varepsilon)^k C_\varepsilon(u)$ для всех k и любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\sqrt[k]{\|A^k u\|_E} \leqslant (\tau+\varepsilon) \sqrt[k]{C_\varepsilon(u)}$, откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n u\|_E} \leqslant \tau + \varepsilon$, $\forall \varepsilon$. Поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n u\|_E} \leqslant \tau$, т. е. $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau)$. Обратно, пусть $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau)$, следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, что $\|A^k u\|_E \leqslant (\tau_1+\varepsilon)^k$, $\forall k \geqslant n_0$ $(\tau_1 \leqslant \tau)$, т. е. $\|A^k u\|_E \leqslant (\tau_1+\varepsilon)^k C_\varepsilon(u)$ для $\forall k$, где

$$C_\varepsilon(u) = \max\left\{\|u\|_E, \frac{\|Au\|_E}{\tau_1+\varepsilon}, \ldots, \frac{\|A^{n_0-1}u\|_E}{(\tau_1+\varepsilon)^{n_0-1}}, 1\right\}.$$

Это означает, что $u \in E_{\tau,\varepsilon}$ для $\forall \varepsilon > 0$, т. е. $u \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} E_{\tau,\varepsilon}(A)$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{E}$ — локально выпуклое пространство, $A : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ — линейный непрерывный оператор. Обозначим $\mathscr{E}_M(A) = \left\{u \in \mathscr{E} : \left\{\frac{A^n}{M^n}\right\}_{n\geqslant 0} \text{ равностепенно непрерывно}\right\}$, $\mathscr{E}_\tau(A) = \bigcap\limits_{M>\tau} \mathscr{E}_M(A)$.

По определению, $\mathscr{E}_M(A)$ — векторное подпространство в $\mathscr{E}$, на котором $A : \mathscr{E}_M(A) \to \mathscr{E}_M(A)$ регулярен. Нетрудно видеть, что $\mathscr{E}_M(A)$, а значит, и $\mathscr{E}_\tau(A)$ замкнуто в $\mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E}_\tau(A)$ — локально выпуклое пространство, на котором оператор $A : \mathscr{E}_\tau(A) \to \mathscr{E}_\tau(A)$ регулярен и его спектральный радиус $r_A = \tau$, ибо на $\mathscr{E}_\tau(A)$ семейство $\left\{\frac{A^n}{(\tau+\varepsilon)^n}\right\}_{n\geqslant 1}$ равностепенно непрерывно при $\forall \varepsilon > 0$.

Определение 4. Пусть $\mathscr{E}$ — локально выпуклое пространство, $A : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ — непрерывный линейный оператор. Обозначим

$$\exp_A(\tau, \mathscr{E}) = \{u \in \mathscr{E} : \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n]{p(A^n u)} \leqslant \tau, \ \forall p \in \mathrm{Spec}\,\mathscr{E}\}.$$

Определение 5. Локально выпуклое пространство будем называть секвенциально ультра-бочечным, если всякое секвенциально замкнутое его подпространство бочечно.

Пространство Фреше секвенциально ультра-бочечно.

Предложение 6. *Множество* $\mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$ *секвенциально замкнуто в* $\mathscr{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E}) \ni u_n \to u \in \mathscr{E}$. Так как $A: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ непрерывно, то $Au_n \to Au$. Переходя к пределу по n в неравенстве $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p(A^k u_n)} \leqslant \tau$, получаем, что $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$.

Предложение 7. *Если $\mathscr{E}$—секвенциально ультра-бочечное пространство и $A: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ — непрерывный линейный оператор, то* $\mathscr{E}_\tau(A) = \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$.

Доказательство. Включение $\mathscr{E}_\tau(A) \subset \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$ доказывается аналогично первой части (1.5). Действительно, пусть $u \in \mathscr{E}_\tau(A)$; тогда семейство $\left\{\dfrac{A^n}{(\tau+\varepsilon)^n}\right\}_{n\geqslant 1}$ равностепенно непрерывно для $\forall\, \varepsilon$, т. е. для $\forall\, p \in \mathrm{Spec}\, E$ $\exists\, q \in \mathrm{Spec}\, E$ такой, что

$$p(A^n u) \leqslant (\tau+\varepsilon)^n q(u) \quad \forall n.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{p(A^n u)} \leqslant (\tau+\varepsilon)\sqrt[n]{q(u)}$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p(A^n u)} \leqslant \tau+\varepsilon$ для $\forall\, \varepsilon$, т. е. $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$.

Пусть теперь $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$. Следовательно, для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$, что $p(A^k u) \leqslant (\tau_1+\varepsilon)^k$, для любого $p \in \mathrm{Spec}\, E$ и всех $k \geqslant n_0$ $(\tau_1 \leqslant \tau)$, т. е. $\left\{\dfrac{A^k u}{(\tau_1+\varepsilon)^k}\right\}$ ограничена при $k \geqslant n_0$. Так как $\left\{\dfrac{A^k u}{(\tau_1+\varepsilon)^k}\right\}$, $k \leqslant n_0$, ограничено всегда, то $\left\{\dfrac{A^k u}{(\tau_1+\varepsilon)^k}\right\}_{k\geqslant 1}$ ограничено на $\mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{E})$

Ввиду предложения 6, наших предположений и теоремы Банаха—Штейнгауза семейство $\left\{\dfrac{A^k}{(\tau_1+\varepsilon)^k}\right\}_{k\geqslant 1}$ равностепенно непрерывно на $\mathrm{Exp}_A(\tau_1, \mathscr{E})$ для $\forall\, \varepsilon > 0$. Таким образом, $u \in \mathscr{E}_{\tau_2}(A) \subset \mathscr{E}_\tau(A)$.

Лемма 2. *Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \to a$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = b$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = ab$*

Доказательство. Для $\forall\, n$, $a \leqslant a_n$, $b = \inf\limits_{n_0} \sup\limits_{n\geqslant n_0} b_n$. Следовательно, $b \leqslant \sup\limits_{n\geqslant n_0} b_n$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \inf\limits_{n_0} \sup\limits_{n\geqslant n_0} a_n b_n = \inf\limits_{n_0} (a_{n_0} \sup\limits_{n\geqslant n_0} b_n) = a \inf\limits_{n_0} \sup\limits_{n\geqslant n_0} b_n = ab$.

Предложение 8. *Пусть E — банахово пространство, $A: E \to E$ — замкнутый линейный оператор такой, что $D(A^\infty) \neq \{0\}$. Тогда* $\mathrm{Exp}_A(\tau) \subset \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E))$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E)) \subset \mathrm{Exp}_A(\tau)$. Пусть $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E))$, следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_m(A^n u)} \leqslant \tau$ для $\forall m$, где p_m — полунорма на $\mathscr{H}_A(E)$. Но так как $\|u\|_E \leqslant p_m(u)$, $\forall\, m$, то $\sqrt[n]{\|A^n u\|_E} \leqslant \sqrt[n]{p_m(A^n u)}$, а значит, и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n u\|_E} \leqslant \tau$, т. е. $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau)$.

Докажем, что $\mathrm{Exp}_A(\tau) \subset \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E))$. Пусть $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau)$, следовательно, для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$, что $\|A^k u\|_E \leqslant (\tau_1+\varepsilon)^k$, $\forall k \geqslant n_0$ $(\tau_1 \leqslant \tau)$. Так как

$$p_m(A^k u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \|A^{n+k} u\|_E,$$

то для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, что при $k \geqslant n_0$

$$p_m(A^k u) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!}(\tau_1 + \varepsilon)^{n+k} = (\tau_1 + \varepsilon)^k \cdot e^{m(\tau_1+\varepsilon)}.$$

Следовательно, $\sup\limits_{k \geqslant n_0} \sqrt[k]{e^{-m(\tau_1+\varepsilon)} p_m(A^k u)} < \tau_1 + \varepsilon$ для $\forall m$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{e^{-m(\tau_1+\varepsilon)} p_m(A^n u)} \leqslant \tau_1$ для $\forall m$. Учитывая лемму 2, имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{e^{-m(\tau_1+\varepsilon)} p_m(A^n u)} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_m(A^n u)}$.

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_m(A^n u)} \leqslant \tau_1 \leqslant \tau$ для $\forall m$, т. е. $u \in \mathrm{Exp}_A(\tau$ $\mathscr{H}_A(E))$.

Теорема 1. *Оператор $A : \mathrm{Exp}_A(\tau) \to \mathrm{Exp}_A(\tau)$ регулярен со спектральным радиусом $r_A = \tau$ и с топологией в $\mathrm{Exp}_A(\tau)$, определяемой топологией из $\mathscr{H}_A(E)$.*

Доказательство. Ввиду предложения 2 оператор $A : \mathscr{H}_A(E) \to \mathscr{H}_A(E)$ непрерывен и $\mathscr{H}_A(E)$ — пространство Фреше (предложение 1), следовательно, $\mathscr{H}_A(E)$ секвенциально ультра-бочечно. Согласно предложению 7, $A : \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E)) \to \mathrm{Exp}_A(\tau, \mathscr{H}_A(E))$ регулярен со спектральным радиусом $r_A = \tau$. Наконец, теорема следует из предложения 8.

Рассмотрим сейчас следующую задачу: каким должно быть пространство бесконечно дифференцируемых функций E и с какой топологией, чтобы оператор дифференцирования в нем был регулярен.

Если в теореме 1 в качестве E положить $L_2(\mathbf{R})$ и $A = d/dx$, то $\mathscr{H}_A(E)$ — пространство аналитических функций с топологией компактной сходимости, а $\mathrm{Exp}_A(\tau)$ — пространство аналитических функций экспоненциального типа, меньших или равных τ (см. [3]). Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы оператор дифференцирования в пространстве аналитических функций был регулярным со спектральным радиусом τ, необходимо и достаточно, чтобы он был определен на пространстве функций экспоненциального типа, меньших или равных τ.*

§ 2. РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В этом параграфе дадим достаточные условия, чтобы матрицы определяли регулярные операторы в пространстве всех последовательностей и в пространстве последовательностей Кёте.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться следующими обозначениями.

Определение 6. Пусть E — банахово пространство. Обозначим

$$l^2_{\mathrm{loc}}(E) = \{u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots) : u_n \in E\}$$

пространство всех последовательностей элементов из E с топологией, определяемой системой полунорм

$$\|u\|^2_{\mathrm{loc},n} = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2_E. \tag{2.1}$$

Предложение 9. *$l^2_{\mathrm{loc}}(E)$ — пространство Фреше.*

Символом $l_0^2(E)$ обозначим векторное пространство финитных последовательностей элементов из E.

Пусть $A=(a_{ij})$ — заданная бесконечная матрица с комплексными элементами. Будем предполагать, что $A=(a_{ij})\in l_{\rm loc}^2(l_0^2(\mathbf{C}))$. Тогда обозначим

$$\|A\|_{\mathrm{loc},n}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty. \tag{2.2}$$

Определение 7. *Длиной* строки i матрицы A будем называть и обозначать $n_A(i)$ наибольшее число, при котором $a_{i,n_A(i)}\neq 0$ и $a_{ij}=0$ при $j>n_A(i)$.

Таким образом, матрицы, принадлежащие $l_{\rm loc}^2(l_0^2(\mathbf{C}))$, являются матрицами с конечными длинами строк.

Определение 8. Обозначим $\mathcal{N}_A(n)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} n_A(k)$, т. е. максимальная длина n первых строк.

Предложение 10. *Оператор $A: l_{\rm loc}^2(\mathbf{C})\to l_{\rm loc}^2(\mathbf{C})$ определен и непрерывен.*

Доказательство вытекает из неравенства

$$\|Au\|_{\mathrm{loc},n}^2=\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}u_i\Big|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ki}|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n_A(k)}|u_i|^2\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\|A\|_{\mathrm{loc},n}^2\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A(n)}|u_i|^2=\|A\|_{\mathrm{loc},n}^2\cdot\|u\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_A(n)}^2. \tag{2.3}$$

Оценивая степени оператора A в пространстве $l_{\rm loc}^2(\mathbf{C})$, получим

$$\|A^2\|_{\mathrm{loc},n}\leqslant\|A\|_{\mathrm{loc},n}\|A\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_A(n)},$$

$$\|A^3\|_{\mathrm{loc},n}\leqslant\|A^2\|_{\mathrm{loc},n}\|A\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_{A^2}(n)}.$$

Продолжая по индукции, получим

$$\|A^k\|_{\mathrm{loc},n}\leqslant\prod_{i=0}^{k-1}\|A\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_{A^i}(n)}. \tag{2.4}$$

Из неравенства (2.3) имеем

$$\|A^k u\|_{\mathrm{loc},n}\leqslant\|A^k\|_{\mathrm{loc},n}\|u\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_{A^k}(n)}. \tag{2.5}$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) видно, что для того, чтобы оператор был регулярен, необходимо, чтобы $\mathcal{N}_{A^k}(n)$ *не зависило от* k.

Например, это выполняется, если

1) $\mathcal{N}_A(n)\leqslant n_0$ для $\forall n$, т. е. матрица A составлена из нулевых столбцов, начиная после n_0;

2) $\mathcal{N}_A(n)=n$, следовательно, $\mathcal{N}_{A^k}(n)=n$ для $\forall k$, т. е. A — треугольная матрица;

3) A — блочно-диагональная матрица.

Однако независимости $\mathcal{H}_{A^k}(n)$ от k недостаточно для регулярности оператора A. Из (2.4) и (2.5) видно также, что для регулярности оператора A достаточно, чтобы $\|A\|_{\mathrm{loc},\mathcal{N}_{A^k}(n)}$ *было ограничено константой, не зависящей от* n. Это условие выполняется, если $A\in l^2(\mathbf{C}\times\mathbf{C})$, т. е. A — матрица Гильберта — Шмидта. Тогда $\|A\|_{\mathrm{loc},n} \leqslant \|A\|_{l^2(\mathbf{C}\times\mathbf{C})}$, и, значит, $\|A^k\|_{\mathrm{loc},n} \leqslant \|A\|^k_{l^2(\mathbf{C}\times\mathbf{C})}$ для $\forall k$.

Таким образом, все сказанное можно резюмировать следующим образом.

Теорема 3. *Оператор, задаваемый блочно-диагональной или треугольной матрицей Гильберта—Шмидта, является регулярным оператором в пространстве Фреше $l^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$.*

Теперь рассмотрим «эшелонированное» пространство Кёте. Напомним кратко их конструкцию. Пусть $b_m = (b_{m1}, \ldots, b_{mn}, \ldots)$ — последовательность положительных чисел (вес). Определим пространство $l^2_{b_m}(\mathbf{C})$ как пространство всех числовых последовательностей $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n|^2 < \infty$ для каждого m, и наделим его топологией, определяемой полунормами

$$\|u\|_m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n|^2. \tag{2.6}$$

Очевидно, если $b_m = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ для $\forall m$, то $l^2_{b_m}(\mathbf{C}) \equiv l^2(\mathbf{C})$. Если $b_{mn} = m^n$, то $l^2_{b_m}(\mathbf{C})$ изоморфно пространству голоморфных функций.

Предположим, что оператор $A: l^2_{b_m}(\mathbf{C}) \to l^2_{b_m}(\mathbf{C})$ задается матрицей $A = (a_{ij}) \in l^2_{b_m \otimes 1/b_q}(\mathbf{C})$ для каждого m и q, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{mi}\frac{1}{b_{qj}}|a_{ij}|^2 = K^2_{m,q} \text{ для каждого } m \text{ и } q. \tag{2.7}$$

Предложение 11. *Если (2.7) имеет место, то $A: l^2_{b_m}(\mathbf{C}) \to l^2_{b_m}(\mathbf{C})$ определен и непрерывен.*

Доказательство вытекает из неравенства

$$\|Au\|_m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}u_k\Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{b_{qk}}}\, a_{nk}\sqrt{b_{qk}}\,u_k\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_{qk}}|a_{nk}|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_{qk}|u_k|^2\Big) =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{\infty} b_{mn}\frac{1}{b_{qk}}|a_{nk}|^2\|u\|_q^2 = K^2_{m,q}\|u\|_q^2$$

для любого q. Отсюда легко получается следующая оценка:

$$\|A^k u\|_m \leqslant K_{m,p_1}K_{p_1,p_2}\cdot\ldots\cdot K_{p_k q}\|u\|_q \quad \text{для } \forall\, p_1, p_2, \ldots, p_k, q.$$

Это неравенство показывает, что справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы оператор, определяемый матрицей $A = (a_{ij})$ был регулярным в пространстве $l^2_{b_m}(\mathbf{C})$, достаточно, чтобы для каждого m, $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} \in l^2_{b_m\otimes 1/b_q}(\mathbf{C})$ и $\exists\, \mathcal{K} > 0$, что $\sum\limits_{k,i=1}^{\infty} b_{mk}\frac{1}{b_{mi}} \times |a_{ki}|^2 \leqslant \mathcal{K}^2$ для всех m.*

Замечание. Предложения относительно пространств $l_{b_m}^2(\mathrm{C})$ можно обобщить в двух направлениях.

Можно рассматривать пространства $l_{b_m}^p(\mathrm{C})$, $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$, и вместо дискретных мер b_m можно рассматривать непрерывные меры $\mu_m(t)$ и тогда получим непрерывные пространства Кёте, изученные Ж. Дьедонне [4].

Литература

1. Радыно Я. В. Дифференц. уравнения, 13, № 8, 1977.
2. Радыно Я. В. Дифференц. уравнения, 13, № 9, 1977.
3. Boas R. Entiere Fonctions, 1954.
4. Diedonne J. J. Analise Math., 1, 81—115, 1951.

Поступила в редакцию 12 апреля 1976 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина