МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ РОБАСТНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.А. Лобатый, М.В .Почебут, Д.Л. Шилин

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
кафедра систем управления
ул. П.Бровки,6, г. Минск, Республика Беларусь
телефон(ы): +375 (29)7022079;; e-mail: pochebut@bsuir.by
web: www.bsuir.by

В статье рассматривается методика построения робастной системы фазового управления с применением анизотропийного регулятора.

Ключевые слова – система фазового управления, анизотропийный регулятор.

1 ОСНОВНОЙ ТЕКСТ

Новым направлением развития систем управления, в том числе и систем фазового управления (СФУ), является применение в задачах синтеза теории робастного управления. Основная идея состоит в том, чтобы единственным регулятором обеспечить устойчивость системы не только для номинального (без учета ошибок модели) объекта, но и для любого реального объекта с учетом неопределенности наших знаний о параметрах объекта управления и возмущениях.

Представляет интерес рассмотрения в качестве критерия оптимальности СФУ H_∞ – нормы многомерной передаточной функции замкнутой системы [1], представляющей собой энергию выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией. Стохастический подход к H_∞ – оптимизации систем автоматического управления основан на использовании критерия качества стохастической нормы системы, которая количественно характеризует чувствительность выхода системы к случайным входным возмущениям, вероятностное распределение которых известно не точно. Это приводит к специальному варианту стохастической нормы – анизотропийной норме [2]. Анизотропийная норма системы характеризует её чувствительность к входным гауссовым шумам, средняя анизотропия которых ограничена сверху неким неотрицательным параметром *a*.

Рассмотрим дискретную СФУ [3], в состав которой входит оптимальный регулятор с передаточной функцией $W_{ку}$, задачей которого является изменение фазовых координат управляемого элемента с передаточной функцией $W_у$, в соответствии с заданным критерием качества. Обобщенная структурная схема такой СФУ имеет вид

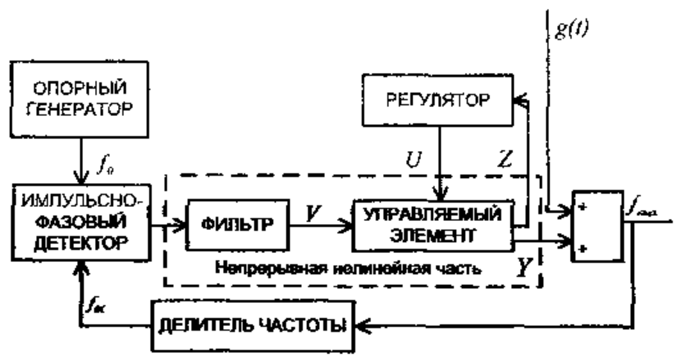

Рис.1. Обобщенная структурная схема СФУ

В соответствии с Рис.1 и методикой получения дискретных моделей систем с фазовым управлением в общем случае управляемый элемент с регулятором в пространстве состояний описываются рекуррентными векторно-матричными выражениями

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{V}_k + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_k, \\ \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_k + \mathbf{D}_{11}\mathbf{V}_k + \mathbf{D}_{12}\mathbf{U}, \\ \mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{C}_2\mathbf{X}_k + \mathbf{D}_{21}\mathbf{V}_k, \end{cases} \tag{1}$$

где **X** – n – мерный вектор внутреннего состояния управляемого элемента; **V** – m_1 – мерный вектор выходного сигнала фильтра; **Y** – p_1 – мерный вектор выходного управляемого сигнала; **Z** – p_2 – мерный вектор наблюдения; **U** – m_2 – мерный вектор управления, $\mathbf{A}, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_j, \mathbf{D}_{ij}$ (i,j= $\overline{1,2}$)– постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть $W_{ку}$ – допустимый регулятор, имеющий h – мерное внутреннее состояние (матрицу **H**), связанное с сигналами наблюдения **Z** и управления **U** рекуррентными формулами

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{k+1} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{H}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}_k, \\ \mathbf{U}_k = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{H}_k \end{cases} \tag{2}$$

где $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ – неизвестные постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Задача состоит в определении матриц $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$, описывающих оператор $W_{ку}$ в пространстве состояний, таких, что минимизируется α – анизотропийная норма замкнутой системы $\Phi(W, W_{ку})$, описываемой выражениями (1) и (2). Формула для вычисления α – анизотропийной нормы системы (1) – (2) имеет вид [1]:

$$\left|\left|\left|\alpha(W,W_{ку})\right|\right|\right| = \left\{\frac{1}{q}\left[1-\frac{m_1}{\mathrm{tr}\left\{\mathbf{LPL}^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}\right\}}\right]\right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Для вычисления (3) необходимо решить три алгебраических матричных уравнения Риккати

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\overline{\mathbf{A}} + q\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{L}, \\ \Sigma \equiv \left[\mathbf{I}_{m_1} - q\mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{11} - \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\overline{\mathbf{B}}\right]^{-1}, \\ \mathbf{L} \equiv \left[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\right] \equiv \Sigma\left[\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\overline{\mathbf{A}} + q\mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{C}}\right], \end{cases} \quad (4)$$

где q – скалярный параметр, принимающий значения из полуоткрытого интервала $\left[0;\left|\left|\left|\alpha(W,W_{ку})\right|\right|\right|_{\infty}^{-2}\right]$, а матрица $\mathbf{L}$ разбита на блоки $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$.

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \left[\mathbf{A}+\mathbf{B}_1\mathbf{L}_1\right]\cdot\mathbf{S}\cdot\left[\mathbf{A}+\mathbf{B}_1\mathbf{L}_1\right]^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_1\Sigma\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} - \Lambda\Theta\Lambda^{\mathrm{T}}, \\ \Theta \equiv \left[\mathbf{C}_2+\mathbf{D}_{21}\mathbf{L}_1\right]\cdot\mathbf{S}\cdot\left[\mathbf{C}_2+\mathbf{D}_{21}\mathbf{L}_1\right]^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_{21}\Sigma\mathbf{D}_{21}^{\mathrm{T}}, \\ \Lambda \equiv \left[\left[\mathbf{A}+\mathbf{B}_1\mathbf{L}_1\right]\cdot\mathbf{S}\cdot\left[\mathbf{C}_2+\mathbf{D}_{21}\mathbf{L}_1\right]^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_1\Sigma\mathbf{D}_{21}^{\mathrm{T}}\right]\Theta^{-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \underline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\underline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{C}} - \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Pi}\mathbf{N}, \\ \mathbf{\Pi} \equiv \underline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\underline{\mathbf{B}} + \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{12}, \\ \mathbf{N} \equiv \left[\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2\right] \equiv -\mathbf{\Pi}^{-1}\left(\underline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\underline{\mathbf{A}} + \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{C}}\right), \end{cases}$$

где матрица $\mathbf{N}$ разбита на блоки $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2$, а матрицы $\underline{\mathbf{A}},\underline{\mathbf{B}},\underline{\mathbf{C}}$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{C}} & * \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1\mathbf{M} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B}_1\mathbf{M}+\mathbf{B}_1\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11}\mathbf{M} & * \end{bmatrix}, \mathbf{M} \equiv \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$$

Искомые матрицы $\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}}$ оптимального анизотропийного H_{∞} – регулятора вычисляются по формулам [1]

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}} + \left[\mathbf{I}_n - \Lambda\right]\times\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}} = \Lambda, \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2. \end{cases} \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}}$ – матрицы реализации допустимого регулятора, $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица (n x n).

Если возмущения, действующие на СФУ, считать белым шумом, то выражения для вычисления оптимального регулятора в пространстве состояний упрощаются и имеют вид

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{N} - \Lambda\mathbf{C}_2, \\ \hat{\mathbf{B}} = \Lambda, \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{N}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{ASA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} - \Lambda\Theta\Lambda^{\mathrm{T}}, \\ \Theta = \mathbf{C}_2\mathbf{SC}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{21}^{\mathrm{T}}, \\ \Lambda \equiv \left[\mathbf{ASC}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_{21}^{\mathrm{T}}\right]\Theta^{-1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{TA} + \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_1 - \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Pi}\mathbf{N}, \\ \mathbf{\Pi} = \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{TB}_2 + \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{12}, \\ \mathbf{N} = -\mathbf{\Pi}^{-1}\left[\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{TA} + \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_1\right] \end{cases} \quad (8)$$

(при этом матрицы $\mathbf{A}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}}$ асимптотически устойчивы).

Выражения (6) – (8) соответствуют нулевой средней анизотропии α=0 и представляют собой H_2 – оптимальный регулятор.

Применение H_2 или H_{∞} – регулятора обусловлено типом действующих на систему шумов. Так H_2 – оптимальный плохо функционирует, если на входе системы сильно окрашенный случайный шум. H_{∞} – регулятор проявляет консервативность (излишнюю перестраховочность) если входной сигнал белый шум или слабо окрашенный шум.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение анизотропийных регуляторов в СФУ является перспективным, так как позволит снизить влияние на качество работы системы неопределенностей, обусловленных различиями между выбранной математической моделью и реальной оптимизируемой системой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.5.: Методы современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, И.Д. Егупова. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784с.

[2] Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Асимитатика анизотропийной нормы линейных стационарных систем// Автоматика и телемеханика. - 1999. – №3.

[3] Бусько В.Л., Лобатый А.А., Русак Л.В. Анализ вероятностных характеристик дискретных систем фазового управления. // Минск. Доклады БГУИР №8(38) 2008, с.93 – 99.