$$\bar{f}^{g}(x,\theta)=1_{[g_-,g_+]}f(x,\theta)+(\varepsilon_- -\varepsilon/2)\,\delta(x-g_-)+(\varepsilon_+ -\varepsilon/2)\,\delta(x-g_+)\,.$$

Если $h\in L_1(f,\varepsilon)$, то $h^g\in L_1(f^g,\varepsilon)$, и следовательно, $\bar{f}^g\in L_1(f^g,\varepsilon)$.

Теорема 2. Если для искаженной модели наблюдений (6) выполнены предположения П1 и П2, то величины $\alpha^+(h^g,\varepsilon)$, удовлетворяют неравенству $\alpha^+(h^g,\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)$.

Следствие 2. Вероятность ошибки первого рода $\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)$ монотонно возрастает по переменной ε, в частности, для любого ε, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, выполняется неравенство $\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon_0)$.

Литература

1. *Вальд А*. Последовательный анализ. М. 1960.
2. *Хьюбер П*. Робастная статистика. М. 1984.
3. *Kharin A, Kishylau D.* Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions // Austrian Journal of Statistics. V. 34. 2005. № 2. P. 153-162.
4. *Charnou S*. Sequential test robustifications for simple hypothesis under outliers. // Abstracts of the International Conference on Robust Statistics. Parma. 2009. P. 22.
5. *Kharin A., Chernov S.* Error Probabilities Evaluation for Sequential Testing of Simple Hypotheses on Data from Continuous Distribution // Proc. of the Pattern Recognition and Information Processing (PRIP). Minsk. 2009. P. 63–66.
6. *Кудрявцев Л. Д*. Курс математического анализа. М. 1981.

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА ПОЛОЖЕНИЯ α – УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Чэнь Хайлун

На основании свойства устойчивых распределений доказано равенство, для получения преобразования с α – устойчивым распределением. Методом характеристических функций (CF) получаем оценки параметров α и σ, затем с помощью преобразования предлагается метод оценки параметра положения μ α – устойчивого распределения при $\alpha\in(0;2]$.

1. МЕТОД CF ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ.

Случайная величина X называется устойчивой, если ее логарифм характеристической функции имеет вид:

$$\psi(\theta)=\ln(\varphi(\theta))=\begin{cases}-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}+i\left(\mu\theta+\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\beta\, sign(\theta)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right),\alpha\ne 1,\\ -\sigma|\theta|+i\left(\mu\theta-\sigma|\theta|\beta\dfrac{2}{\pi}sign(\theta)\ln|\theta|\right),\quad \alpha=1.\end{cases}\qquad(1)$$

где $\varphi(\theta)=E\exp[i\theta X]$, $\alpha\in(0,2]$, $\beta\in[-1,1]$, $\sigma>0$, $\mu\in R$, $\theta\in R$. В этом случае будем писать $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$. Если в соотношении (1) β = 0, то устойчивые распределения называются симметричными.

Основная идея метода CF состоит в том, чтобы по выборочным данным оценить характеристическую функцию. Затем используя действительную и мнимую часть логарифма характеристической функции оценить α, σ и β, μ. Однако, в связи с тем, что характеристическая функция α – устойчивых распределений меняет вид при α = 1, то трудно получить точную оценку параметра μ (параметра положения).

2. МЕТОД ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ПОЛОЖЕНИЯ.

В настоящее время в литературе мало методов для оценки параметра μ. Когда $\alpha\to 1$ и $\beta\neq 0$, то сложно оценить μ, и даже в случае μ = 0, нет хорошего способа для точного оценивания μ. В [1] даётся подходящая оценка параметра μ в случае $\alpha\in(1,2]$. Чтобы достичь подходящей оценки параметра μ для случая $\alpha\in(0,2]$, на основании свойства устойчивых распределений [1], используется следующая теорема:

Теорема [2]. Пусть Xk – независимые одинаково распределенные устойчивые случайные величины с параметрами α, σ, β, μ, т.е. Xk ~ Sα(σ,β,μ) тогда:

$$Z=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k\sim S_\alpha\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}\sigma,\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\langle\alpha\rangle}}{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^\alpha}\beta,\sum_{k=1}^{n}a_k\mu\right),$$

где $a_k^{\langle\alpha\rangle}=sign(a_k)|a_k|^\alpha$.

Из теоремы могут быть выведены 3 типа преобразований: XC – центрирующее преобразование, XD – выравнивающее преобразование, XS – симметричное преобразование.

Лемма 1. Пусть Xk ~ Sα(σ,β,μ), $k=\overline{1,n}$ и $X_k^C\sim X_{3k}+X_{3k-1}-2X_{3k-2}$, тогда:

$$X_k^C\sim S_\alpha\left(\left(2+2^\alpha\right)^{1/\alpha}\sigma,\left(\frac{2-2^\alpha}{2+2^\alpha}\right)\beta,0\right);$$

Доказательство. В типе преобразования XC $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=-2$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{3}|a_k|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=\left(1^{\alpha}+1^{\alpha}+|-2|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=\left(2+2^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{3}a_k^{\langle\alpha\rangle}}{\sum_{k=1}^{3}|a_k|^{\alpha}}\beta=\frac{1^{\alpha}+1^{\alpha}-|-2|^{\alpha}}{1^{\alpha}+1^{\alpha}+|-2|^{\alpha}}\beta=\frac{2-2^{\alpha}}{2+2^{\alpha}}\beta,$$

$$\sum_{k=1}^{3}a_k\mu=(a_1+a_2+a_3)\mu=(1+1-2)\mu=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть Xk ~ Sα(σ,β,μ), $k=\overline{1,n}$ и $X_k^D\sim X_{3k}+X_{3k-1}-2^{1/\alpha}X_{3k-2}$, тогда:

$$X_k^D\sim S_{\alpha}\left(4^{1/\alpha}\sigma,0,\left(2-2^{1/\alpha}\right)\mu\right);$$

Доказательство. В типе преобразования XD $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=-2^{1/\alpha}$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{3}|a_k|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=\left(1^{\alpha}+1^{\alpha}+\left|-2^{1/\alpha}\right|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=4^{1/\alpha}\sigma,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{3}a_k^{\langle\alpha\rangle}}{\sum_{k=1}^{3}|a_k|^{\alpha}}\beta=\frac{1^{\alpha}+1^{\alpha}-\left|-2^{1/\alpha}\right|^{\alpha}}{1^{\alpha}+1^{\alpha}+\left|-2^{1/\alpha}\right|^{\alpha}}\beta=\frac{2-2}{2+2}\beta=0,$$

$$\sum_{k=1}^{3}a_k\mu=(a_1+a_2+a_3)\mu=\left(1+1-2^{1/\alpha}\right)\mu=\left(2-2^{1/\alpha}\right)\mu.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть Xk ~ Sα(σ,β,μ), $k=\overline{1,n}$ и $X_k^S\sim X_{2k}-X_{2k-1}$, тогда:

$$X_k^S\sim S_{\alpha}\left(2^{1/\alpha}\sigma,0,0\right).$$

Доказательство. В типе преобразования XS $a_1=1$, $a_2=-1$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{2}|a_k|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=\left(|a_1|^{\alpha}+|a_2|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=\left(1^{\alpha}+|-1|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\sigma=(1+1)^{1/\alpha}\sigma=2^{1/\alpha}\sigma,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{2} a_k^{\langle\alpha\rangle}}{\sum_{k=1}^{2} |a_k|^{\alpha}}\beta = \frac{sign(a_1)|a_1|^{\alpha} + sign(a_2)|a_2|^{\alpha}}{|a_1|^{\alpha} + |a_2|^{\alpha}}\beta = \frac{1^{\alpha} - |-1|^{\alpha}}{1^{\alpha} + |-1|^{\alpha}}\beta = \frac{1-1}{2}\beta = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_k \mu = (a_1 + a_2)\mu = (1-1)\mu = 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим n независимых наблюдений $X_1,\ldots,Xn$ за случайной величиной $Xk \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$.

Нетрудно заметить, что длина последовательности XC и XD это не более 1/3 длины исходной последовательности, а длина последовательности XS – не более 1/2 длины исходной последовательности. В связи с тем, что преобразование XD может преобразовать случайную последовательность $Xk \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ в симметричное распределение $X_k^D \sim S_{\alpha^D}\left(\sigma^D, 0, \mu^D\right)$ и μD – медиана XkD [3], тогда:

$$\mu = \mu^D \left(2 - 2^{1/\alpha}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Учитывая, что длина последовательности должна быть кратна 3, смоделируем 9999 значений α – устойчивой случайной величины $S_\alpha(2,–0.9,1)$ и оценим параметр положения μ формула (2), при $\alpha \in [0.2, 1.8]$ (см. рис. 1, 2).

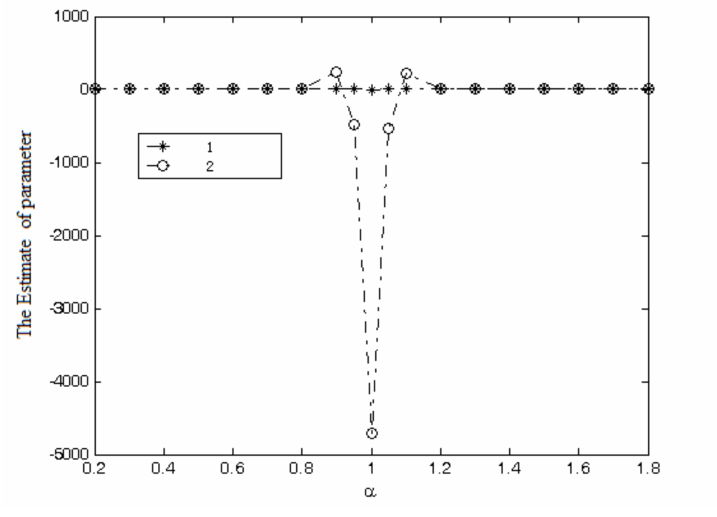

Рис.1. Оценка параметра μ для $S_\alpha(2,–0.9,1)$:
1–метод статьи;2–метод CF

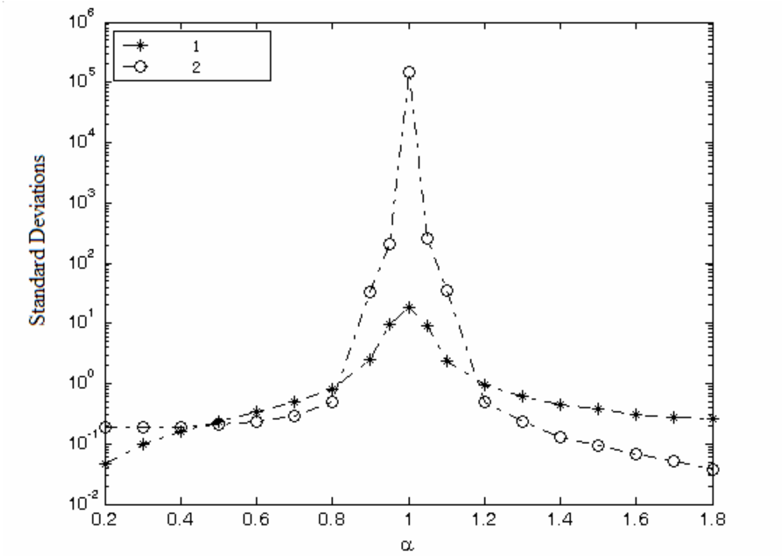

Рис.2. Стандартное отклонение параметра μ для $S_\alpha(2,-0.9,1)$:
1–метод статьи;2–метод CF

Для несимметричного распределения $S_\alpha(2,-0.9,1)$ метод оценки параметра положения μ при α, близким к 1, лучше метода CF.

Литература

1. *G. Samorodnistsky , M. Naqqu*. Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. // Chapman and Hall. New York. London. 1994.
2. *E. E. Kuruoglu*. Density parameter estimation of skewed α-stable distributions. // Signal Processing. IEEE Transaction on. Oct. 2001. 49(10). P. 2192–2201.
3. *В. М. Золотарев*. Одномерные устойчивые распределения. // В.М. Золотарев. М. Наука. 1983. С. 304.

РАЗРАБОТКА РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ НАДЁЖНОГО ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ

В.О. Шукело

ВВЕДЕНИЕ

В эпоху глобальной информатизации в обществе накапливается огромное количество информации в электронном виде, которое представляет интерес для будущего. В связи с этим возникает проблема надежного сохранения накопленной информации. Технические устройства хранения данных не являются абсолютно надежными. Кроме того для надёжного хранения данных не могут использоваться централизованные системы. Такие системы должны иметь распределенный характер.