О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИЙ ДРЕЙФА И ДИФФУЗИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е. Г. Красногир

Белорусский государственный университет

Пусть X_0, X_1, ..., X_n – наблюдения случайного процесса X_t, соответственно в моменты времени t_0, $t_1 = t_0 + \Delta$, ..., $t_n = t_0 + n\Delta$, где Δ – фиксированный временной интервал. Процесс порождается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс. Функция $\mu(\cdot)$ называется функцией дрейфа или дрейфом, $\sigma(\cdot)$ – диффузией (функцией диффузии) или волатильностью.

Непараметрические оценки функций дрейфа и диффузии соответственно задаются формулами

$$\mu_h(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)K_h(x - X_i)}{\Delta\sum_{i=0}^{n-1}K_h(x - X_i)}, \qquad (2)$$

$$\sigma_h^2(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2 K_h(x - X_i)}{\Delta\sum_{i=0}^{n-1}K_h(x - X_i)}, \qquad (3)$$

где $K_h(x)$ – ядерная функция непараметрической оценки.

Из (3) следует, что $\sigma_h(x) > 0$ для всех x из области определения, в частности $\sigma_h(0) > 0$. В то же самое время для моделей диффузионных процессов, используемых в стохастической математике, таких как модели Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) [1], Ана – Гао (AG) [2] и др., истинное значение функции диффузии $\sigma(0) = 0$. Поэтому возникает потребность в рассмотрении некоторых модификаций оценки (3), для которых этот недостаток преодолевается. Такими модификациями, например, могут быть следующие

$$\sigma_h^2(x) = x \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 K_h(x - X_i) / X_i}{\Delta \sum_{i=0}^{n-1} K_h(x - X_i)},$$

$$\sigma_h^2(x) = x^3 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 K_h(x - X_i) / X_i^3}{\Delta \sum_{i=0}^{n-1} K_h(x - X_i)}.$$

Можно доказать, что для моделей Васичека [3], CIR и AG такие оценки при оптимальных параметрах размытости ядерных функций являются строго состоятельными. При этом устанавливается их связь с параметрическими оценками.

Пусть $\{X_i,\ Y_i\}$, $i = \overline{1,n}$, – двумерная выборка объема n из (X, Y), а $m(x) = E[Y \mid X = x]$. Предположим, что X и Y имеют совместную плотность и соответственно маргинальные плотности. Непараметрической ядерной оценкой Надарая-Ватсона регрессии $m(x)$ называется функция

$$m_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i)}, \tag{4}$$

где $K_h(a) = K(a / h)$.

Представляет интерес рассмотреть поведение непараметрической оценки функции регрессии (4), для значений аргумента вне выборочного интервала $[X_{\min},\ X_{\max}]$. Если используется ядро, принимающее ненулевые значения в конечной области (например, ядро Епанечникова), то знаменатель (4) не равен нулю только на ограниченном интервале значений аргумента. Поэтому такая оценка определяется только на ограниченном интервале, который может оказаться довольно узким. Однако если использовать ядро, которое отличается от нуля для всех конечных значений аргумента, тогда оценка (4) оказывается определенной на на всей числовой оси (к таким ядрам относится гауссовое ядро). Поэтому возникает вопрос, корректно ли рассматривать непараметрическую ядерную оценку регрессии типа(4) за пределами интервала $[X_{\min}, X_{\max}]$. Для ядра K_h в виде нормальной плотности с нулевым средним и дисперсией h^2 установлено, что $\lim\limits_{x \to -\infty} m_h(x) = \frac{1}{t} \sum\limits_{j \in J} Y_j$, где J – множество индексов i, таких что $X_{\min} = X_i$, t – количество наблюдений, равных $X_{\min}$. Аналогично $\lim\limits_{x \to \infty} m_h(x) = \frac{1}{s} \sum\limits_{j \in G} Y_j$, где G – множество индексов i, таких что $X_{\max} = X_i$, s – количество наблюдений, равных $X_{\max}$. Здесь $X_{\min}$ и $X_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значение среди всех X_i. Так что непараметрическая оценка является ограниченной, тогда как функции $\mu(x)$ и $\sigma(x)$, вообще говоря, могут быть неограниченными. Численные эксперименты показывают, что непараметрическую оценку функции регрессии независимо от ядра целесообразно рассматривать только на интервале значений аргумента $x \in [X_{\min} - h,\ X_{\max} + h]$.

Другая интересная проблема – изучение чувствительности непараметрических оценок к добавлению новых наблюдений. Рассмотрим непараметрическую оценку регрессии вида (4) для n наблюдений процесса X_t, удовлетворяющего (1). Такую оценку обозначим как $m_h^{(n)}(x)$.

Выберем произвольное значение переменной x и зафиксируем его. Определим множество J – множество индексов j ($1 \le j \le n$), такое что $X_j = x$ для всех $j \in G$; k – его мощность. Пусть X_* – ближайшее к x наблюдение, $X_* \ne x$, тогда D – множество индексов d ($1 \le d \le n$), такое что $X_d = X_*$ для всех $d \in D$; q – его мощность.

Утверждение. Если ядро $K_h(y) > 0$ для всех y и $h > 0$, то значения $\lim_{h \to 0} m_h^{(n)}(x)$ и $\lim_{h \to 0} m_h^{(n+1)}(x)$ различаются в точке $x = X_{n+1}$ и некоторой ее окрестности. Различие определяется следующим образом:

если $x = X_{n+1}$ и множество J не пустое, тогда

$$\lim_{h \to 0} m_h^{(n)}(x) - \lim_{h \to 0} m_h^{(n+1)}(x) = \frac{1}{k} \sum_{j \in J} Y_j - \frac{1}{k+1} \sum_{l \in J \cup \{n+1\}} Y_l \,;$$

если $| X_{n+1} - x | < | X_* - x |$ и множество J пустое, тогда

$$\lim_{h \to 0} m_h^{(n)}(x) - \lim_{h \to 0} m_h^{(n+1)}(x) = \frac{1}{q} \sum_{d \in D} Y_d - Y_{n+1};$$

если $| X_{n+1} - x | = | X_* - x |$ и множество J пустое, тогда

$$\lim_{h \to 0} m_h^{(n)}(x) - \lim_{h \to 0} m_h^{(n+1)}(x) = \frac{1}{q} \sum_{d \in D} Y_d - \frac{1}{q+1} \sum_{s \in D \cup \{n+1\}} Y_s \,.$$

Так как непараметрическая оценка диффузии непрерывна, то отсюда следует, что отличия между $m_h^{(n)}(x)$ и $m_h^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки $x = X_{n+1}$ сохраняются и для значений параметра размытости, близких к нулю, какими обычно являются оптимальные h.

С помощью вычислительных экспериментов установлено, что существуют ситуации, когда с достаточно большой вероятностью непараметрические оценки функции регрессии (2), (3), (4) являются чувствительными к добавлению новых наблюдений.

Литература

1. Cox J. C. A Theory of the Term Structure of Interest Rate / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // Econometrica. Vol. 53. 1985. P. 385–467.

2. Ahn D.-H. A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics / D.-H. Ahn, B. Gao // The Review of Financial Studies. Special 1999 Vol. 12, No. 4. P. 721 – 762.

3. Vasiček O. A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure / O. A. Vasiček // Journal of Financial Economics. Vol. 5. 1977. P. 177–188.