

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ТИПА CIR

Г. А. Медведев

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

MedvedevGA@bsu.by

Используемые для анализа математические модели процессов финансового рынка часто приводят к математическим уравнениям, которые не могут быть решены в аналитическом виде, либо к трудными вычислительным проблемам. Поэтому имеет смысл рассмотреть возможность имитационного моделирования таких процессов, чтобы при их анализе можно было бы избежать математических и вычислительных трудностей.

Ключевые слова: процентная ставка, имитационное моделирование, стохастические процессы с «квадратным корнем»

ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Во многих литературных источниках отмечается недостаточная гибкость в описании реальных рыночных процессов процентных ставок однофакторными моделями. Так, в статье Дж. Кокса, Дж. Ингерсолла и С. Росса (J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross, 1985) была предложена не только широко известная однофакторная модель CIR, но и несколько ее обобщений. В частности, было предложено рассматривать вместо одной переменной состояния, которой являлась краткосрочная процентная ставка R , еще и вторую – ее экспоненциально сглаженное среднее L . Такая идея высказывалась и ранее Б. Малкилом (B. Malkiel, 1966), который в своей дискретной модели применял, правда, скользящее среднее. В соответствии с этим двумерная модель CIR была определена (с точностью до обозначений) следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} dR(t) &= k(L(t) - R(t))dt + \sigma\sqrt{R(t)} dW(t), \\ dL(t) &= \beta(R(t) - L(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Особенностью этой модели является то, что описываемый двумерный процесс возбуждается только одним случайным винеровским процессом. Позднее Е. Шью и Й. Яо (E. Shiu, Y. Yao, 1999) провели ее анализ и получили явный вид временной структуры для этой модели краткосрочной ставки.

Несколько более сложная двумерная модель была также предложена CIR (1981) в виде

$$\begin{aligned} dR(t) &= [k_1(\Theta - R(t)) + k_2(L(t) - R(t))]dt + \sigma\sqrt{R(t)} dW(t), \\ dL(t) &= \beta(R(t) - L(t))dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

и также проанализирована Е. Шью и Й. Яо с целью получить явный вид временной структуры доходности.

Рассмотрим свойства процессов краткосрочной процентной ставки, порождаемых этими двумерными моделями CIR.

Запишем уравнение (4.1) в матричной форме:

$$dX(t) = AX(t)dt + B(t)dW(t), \quad (4.3)$$

где обозначено

$$X(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -k & k \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{R(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

с начальными условиями $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$, т. е. $X(0) = X_0$; $W(t)$ – скалярный винеровский процесс.

Тогда дифференциальное уравнение (4.3) можно записать в интегральной форме следующим образом:

$$X(t) = U(t)X_0 + \int_0^t U(t-s)B(s)dW(s), \quad (4.5)$$

где $U(t)$ – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $U'(t) = AU(t)$ с начальным условием $U(0) = I$, I – единичная матрица.

Если собственные числа матрицы A различны, матрицу $U(t)$ удобнее всего представить в виде $U(t) = CD(t)C^{-1}$, где C – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A , а $D(t)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят величины $\exp(\lambda_i t)$, λ_i – собственные числа матрицы A . Для матрицы A , определяемой (4.4), получается, что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(k + \beta)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\beta/k \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(k+\beta)t} \end{pmatrix}, \quad U(t) = \frac{1}{k+\beta} \begin{pmatrix} \beta + ke^{-(k+\beta)t} & k(1 - e^{-(k+\beta)t}) \\ \beta(1 - e^{-(k+\beta)t}) & k + \beta e^{-(k+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Поэтому представление (4.5) для уравнений (4.1) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{k+\beta} \begin{pmatrix} R_0(\beta + ke^{-(k+\beta)t}) + L_0k(1 - e^{-(k+\beta)t}) \\ R_0\beta(1 - e^{-(k+\beta)t}) + L_0(k + \beta e^{-(k+\beta)t}) \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{k+\beta} \begin{pmatrix} \int_0^t (\beta + ke^{-(k+\beta)(t-s)})\sqrt{R(s)}dW(s) \\ \int_0^t \beta(1 - e^{-(k+\beta)(t-s)})\sqrt{R(s)}dW(s) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Из представления (4.6) следует, что если значения процессов $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$ в начальный момент будут случайными величинами с одинаковым математическим ожиданием $E[R(0)] = E[L(0)] = \theta$, то в каждый момент времени $t > 0$ математические ожидания процессов $R(t)$ и $L(t)$ будут одинаковыми и равными θ , что и предполагалось в модели. Вместе с тем заметим, что если $\{R(0) = R_0, L(0) = L_0\}$ являются некоторыми фиксированными значениями процессов, то средние значения процессов $R(t)$ и $L(t)$, $t > 0$, будут со временем сходиться к θ только в том случае, если R_0 и L_0 будут принадлежать многообразию, задаваемому равенством $(\beta R_0 + kL_0)/(k + \beta) = \theta$.

Дисперсии и ковариация процессов $R(t)$ и $L(t)$ имеют вид

$$\text{var}[R(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t + \frac{2\beta k}{k+\beta}(1 - e^{-(k+\beta)t}) + \frac{k^2}{2(k+\beta)}(1 - e^{-2(k+\beta)t}) \right], \quad (4.7)$$

$$\text{var}[L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t - \frac{2\beta^2}{k+\beta}(1 - e^{-(k+\beta)t}) + \frac{\beta^2}{2(k+\beta)}(1 - e^{-2(k+\beta)t}) \right], \quad (4.8)$$

$$\text{cov}[R(t), L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t + \beta \frac{k-\beta}{k+\beta}(1 - e^{-(k+\beta)t}) + \frac{k\beta}{2(k+\beta)}(1 - e^{-2(k+\beta)t}) \right]. \quad (4.9)$$

Отсюда следует, что дисперсии процессов со временем возрастают, и стационарный режим модели (4.1) не существует. Ковариация процессов также со временем возрастает. При этом экспоненциальные слагаемые становятся малыми, и для достаточно больших t можно написать формулы (4.7) – (4.9) в более компактном виде:

$$\text{var}[R(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t + \frac{k(k+4\beta)}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t}) \right],$$

$$\text{var}[L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t - \frac{3\beta^2}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t}) \right],$$

$$\text{cov}[R(t), L(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{(k+\beta)^2} \left[\beta^2 t + \frac{\beta(3k-\beta)}{2(k+\beta)} + O(e^{-(k+\beta)t}) \right].$$

Из этих формул видно, что коэффициент корреляции процессов $R(t)$ и $L(t)$ можно записать в форме

$$\rho(t) = \frac{\text{cov}[R(t), L(t)]}{\sqrt{\text{var}[R(t)]\text{var}[L(t)]}} = 1 + O(t^{-1}),$$

откуда следует, что со временем эти процессы становятся полностью коррелированными.

Отсутствие стационарного режима в модели (4.1) является ее существенным недостатком.

Теперь обратимся к модели (4.2). Ее матричная форма модифицируется к виду

$$dX(t) = A X(t)dt + bdt + B(t)dW(t), \quad (4.10)$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ L(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} k_1 \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \sigma \sqrt{R(t)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

В этом случае для любых положительных параметров k_1 , k_2 и β собственные числа матрицы A будут различными и отрицательными. Это гарантирует существование стационарного режима в модели (4.2).

Поэтому фундаментальная матрица может быть снова представлена в виде $U(t) = CD(t)C^{-1}$. Обозначим для краткости собственные числа матрицы A через λ и μ , а также определим $\delta = \beta/(\lambda + \beta)$, $\gamma = \beta/(\mu + \beta)$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}, \quad U(t) = \frac{1}{\gamma - \delta} \begin{pmatrix} \gamma e^{\lambda t} - \delta e^{\mu t} & e^{\mu t} - e^{\lambda t} \\ \delta \gamma (e^{\lambda t} - e^{\mu t}) & \gamma e^{\mu t} - \delta e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Представление процесса (4.10) в стационарном режиме имеет следующий вид:

$$X(t) = \int_0^{\infty} U(s) b ds + \int_0^{\infty} U(s) B(t-s) dW(t-s). \quad (4.12)$$

Использование формул (4.11) и (4.12) позволяет найти стационарные математические ожидания, дисперсии и ковариацию процессов $R(t)$ и $L(t)$ для модели (4.2) в форме

$$E[R(t)] = E[L(t)] = \theta, \quad \text{var}[R(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2k_1} \frac{\beta + k_1}{\beta + k_1 + k_2},$$

$$\text{var}[L(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2k_1} \frac{\beta}{\beta + k_1 + k_2}, \quad \text{cov}[R(t), L(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2k_1} \frac{\beta}{\beta + k_1 + k_2}.$$

В частности, отсюда следует, что стационарный коэффициент корреляции для процессов $R(t)$ и $L(t)$ равен

$$\rho(t) = \frac{\text{cov}[R(t), L(t)]}{\sqrt{\text{var}[R(t)] \text{var}[L(t)]}} = \sqrt{\frac{\beta}{\beta + k_1}}.$$

Теперь обратимся к проблеме определения распределения вероятностей процессов $R(t)$ и $L(t)$. Введем более удобные обозначения:

$$u = \frac{2(k_1 + k_2)R}{\sigma^2}, \quad v = \frac{2(k_1 + k_2)L}{\sigma^2}, \quad m = \frac{2(k_1 + k_2)\theta}{\sigma^2}.$$

Тогда для плотности вероятностей процессов $R(t)$ и $L(t)$ можно выписать уравнение Колмогорова в следующем виде:

$$(k_1 + k_2) \{ [up]''_{uu} + [(u - (k_2 v + k_1 m))/(k_1 + k_2))p]'_u \} - \beta[(u - v)p]' = p'_v. \quad (4.13)$$

Это уравнение записано в обозначениях модели (4.2). Для получения уравнения для модели (4.1) достаточно в (4.13) положить $k_1 = 0$, $k_2 = k$.

К сожалению, решение уравнения (4.13) в аналитическом виде получить не удастся, и проблему его решения обсудим позже.

Особенностью моделей (4.1) и (4.2) является то, что только процесс процентной ставки $R(t)$ возбуждается винеровским процессом, а процесс локального среднего $L(t)$ определяется фильтрацией реализации процесса $R(t)$. С информационной точки зрения процесс $L(t)$ основан на «забывании» прежних значений процесса $R(t)$ с определенной скоростью, задаваемой параметром β . Таким образом, фактически вся информация, поставляемая процессом $L(t)$, уже содержится в процессе $R(t)$. В отличие от этого, можно рассматривать модели, в которых процесс локального среднего $L(t)$ определяется также инновациями, отличающимися от тех, которые определяют процесс $R(t)$. Иначе говоря, могут существовать различные (точнее, в той или иной мере незави-

симые) стохастические механизмы, управляющие процессами $R(t)$ и $L(t)$. Тогда мы приходим к так называемым двухфакторным моделям процентной ставки.

Двухфакторная модель, возбуждаемая двумя случайными процессами, рассматривалась М. Морено (М. Moreno, 1996). Однако в модели Морено переменными состояниями выбраны долгосрочное среднее $L(t)$ краткосрочной ставки $R(t)$ и спред между ними $S(t) = R(t) - L(t)$. Оба процесса $L(t)$ и $S(t)$ предполагались диффузионными и независимо друг от друга определялись по схеме модели Васичека (О. Vasiček, 1977), что существенно облегчило анализ.

В отличие от модели Морено здесь рассматривается двухфакторная модель $\{R(t), L(t)\}$, отличающаяся не только тем, что оба процесса возбуждаются независимыми винеровскими процессами, а волатильности обоих процессов зависят от $R(t)$ по схеме CIR, но предполагается также наличие ненулевой нижней отражающей границы для процесса $R(t)$. В однофакторном случае наличие нижней отражающей границы для процесса $R(t)$ объединяет модели CIR и Васичека, которые получаются из этой модели как предельные случаи соответственно при нулевой отражающей границе и границе, удаленной на минус бесконечность.

Общие сведения о модели

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки $R(t)$, которую представим в виде пары стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dR(t) &= k_1(L(t) - R(t))dt + \sigma_1 \sqrt{R(t) - x} dW_1(t), \\ dL(t) &= k_2(\Theta - L(t))dt + \sigma_2 \sqrt{R(t) - x} dW_2(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь $R(t)$ – процесс безрисковой процентной ставки; $L(t)$ – процесс ее локального (по времени) математического ожидания; Θ , k_1 , k_2 , σ_1 , σ_2 – постоянные параметры модели; x – нижняя отражающая (недостижимая) граница процесса $R(t)$; $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – стандартные независимые между собой винеровские процессы. Заметим, что поскольку случайный процесс $L(t)$ является процессом локального (по времени) математического ожидания, его изменения во времени более медленные, чем у процесса $R(t)$, поэтому для коэффициентов k_1 и k_2 можно предполагать выполнение неравенства $k_1 > k_2$.

Для упрощения аналитических выкладок удобнее уравнения (4.14) записать в несколько ином виде. Вместо процессов $R(t)$ и $L(t)$ введем их смещенные эквиваленты соотношениями: $r(t) = R(t) - x$, $l(t) = L(t) - x$. Тогда уравнения (4.14) примут вид

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} dW_1(t), \\ dl(t) &= k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2 \sqrt{r(t)} dW_2(t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\theta = \Theta - x$. Будем считать, что условия недостижимости нижней границы процессом $R(t)$ выполняются, тогда процесс $r(t)$ является процессом с положительными значениями. При некоторых дополнительных условиях на величину σ_2 процесс $l(t)$ будет также процессом с положительными значениями.

При условии, что в момент времени v процессы $r(t)$ и $l(t)$ принимали значения $r(v)$ и $l(v)$, их можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} r(t) &= r(v)e^{-k_1(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_1(t-v)}) + \frac{k_1}{k_1 - k_2} (l(v) - \theta) [e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}] + \\ &+ \sigma_1 \int_v^t e^{-k_1(t-u)} \sqrt{r(u)} dw_1(u) + \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}] \sqrt{r(u)} dw_2(u), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$l(t) = l(v)e^{-k_2(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + \sigma_2 \int_v^t e^{-k_2(t-u)} \sqrt{r(u)} dw_2(u). \quad (4.17)$$

Из соотношений (4.16) и (4.17) можно получить выражения для среднего значения и дисперсии процессов $r(t)$ и $l(t)$:

$$\begin{aligned} E[r(t) | r(v), l(v)] &= \frac{\theta}{k_1 - k_2} [k_1(1 - e^{-k_2(t-v)}) - k_2(1 - e^{-k_1(t-v)})] + \\ &+ r(v)e^{-k_1(t-v)} + l(v) \frac{k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$E[l(t)|l(v)] = \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + l(v)e^{-k_2(t-v)}. \quad (4.19)$$

Из выражений (4.18) и (4.19) видно, что при $r(v) > 0$ и $l(v) > 0$ условные математические ожидания остаются положительными для всех $t > 0$. Условные дисперсии $D[r(t) | r(v), l(v)]$, $D[l(t) | r(v), l(v)]$ и ковариация $\text{cov}[r(t), l(t) | r(v), l(v)]$ вычисляются по формулам

$$D[r(t) | r(v), l(v)] = \sigma_1^2 \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} E[r(u) | r(v), l(v)] du + \\ + \frac{\sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 E[r(u) | r(v), l(v)] du,$$

$$D[l(t) | r(v), l(v)] = \sigma_2^2 \int_v^t e^{-2k_2(t-u)} E[r(u) | r(v), l(v)] du.$$

$$\text{cov}[r(t), l(t) | r(v), l(v)] = \frac{\sigma_2^2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}] e^{-k_2(t-u)} E[r(u) | r(v), l(v)] du.$$

Поскольку явные формулы для дисперсий и ковариации громоздки, приведем только их стационарные выражения (т. е. безусловные дисперсии и ковариацию), которые можно получить, если перейти к пределу при $v \rightarrow -\infty$. В этом случае стационарные представления процессов $r(t)$ и $l(t)$ приобретают вид

$$r(t) = \theta + \sigma_1 \int_0^\infty e^{-k_1 u} \sqrt{r(t-u)} dw_1(t-u) + \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_0^\infty (e^{-k_2 u} - e^{-k_1 u}) \sqrt{r(t-u)} dw_2(t-u), \quad (4.20)$$

$$l(t) = \theta + \sigma_2 \int_0^\infty e^{-k_2 u} \sqrt{r(t-u)} dw_2(t-u). \quad (4.21)$$

Поэтому безусловные математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов имеют вид

$$E[r(t)] = E[l(t)] = \theta, \quad (4.22)$$

$$D_r \equiv D[r(t)] = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2k_1} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}, \quad D_l \equiv D[l(t)] = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}, \quad (4.23)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Имитационное моделирование рассматриваемой двухфакторной системы тоже, по существу, является аппроксимацией процессов, но теперь уже аппроксимацией системы непрерывного времени системой дискретного времени. Поэтому для моделирования процессов $r(t)$ и $l(t)$ необходимо переходить от системы (4.15) к некоторой системе дискретного времени. Естественным способом для этого является переход в (4.15) от инфинитезимальных приращений к приращениям за конечный интервал времени. Заметим, что приращения винеровских процессов за конечный интервал времени можно интерпретировать как $W(t + \Delta t) - W(t) = \xi_t \sqrt{\Delta t}$, где ξ_t – нормально распределенная стандартная случайная величина, и для различных t случайные величины ξ_t независимы.

Для приращений за конечный интервал времени уравнения (4.15) запишутся в виде

$$r(t + \Delta t) - r(t) = k_1(l(t) - r(t))\Delta t + \sigma_1 \sqrt{r(t)} [W_1(t + \Delta t) - W_1(t)], \\ l(t + \Delta t) - l(t) = k_2(\theta - l(t))\Delta t + \sigma_2 \sqrt{r(t)} [W_2(t + \Delta t) - W_2(t)],$$

где параметры σ_1 и σ_2 определяются из соотношений (4.25).

Вообще говоря, процессы, описываемые этими уравнениями, уже не являются процессами, задаваемыми системой (4.15), они являются только аппроксимациями этих процессов и имеют отличающиеся свойства. Поэтому для их анализа имеет смысл изменить обозначения. Пусть $t = i\Delta t$, $r(t) = r_i$, $l(t) = l_i$, $k_1\Delta t = h_1$, $k_2\Delta t = h_2$. Тогда эту систему можно записать в виде

$$r_{i+1} = (1 - h_1)r_i + h_1 l_i + \sigma_1 \sqrt{r_i} \xi_i, \\ l_{i+1} = (1 - h_2)l_i + h_2 \theta + \sigma_2 \sqrt{r_i} \eta_i, \quad (4.50)$$

где стандартные нормальные случайные величины $\{\xi_i, \eta_i; i = 1, 2, \dots\}$ независимы в совокупности, а в выражениях (4.25) для σ_1 и σ_2 величины k_1 и k_2 заменены на h_1 и h_2 .

Важно заметить, что стационарное распределение для процессов (4.50) существует только тогда, когда значения параметров h_1 и h_2 меньше единицы. Кроме того, условие существования нижней отражающей недостижимой границы Феллера для системы дискретного времени уже не работает. Из равенств (4.50) следует, что при фиксированных r_j и l_j значения процентной ставки r_{j+1} и его локального математического ожидания l_{j+1} оказываются отрицательными с положительными вероятностями соответственно

$$\Phi\left(-\frac{(1-h_1)r_j + h_1 l_j}{\sigma_1 \sqrt{r_j}}\right), \quad \Phi\left(-\frac{(1-h_2)l_j + h_2 \theta}{\sigma_2 \sqrt{r_j}}\right).$$

Поэтому при моделировании процессов непрерывного времени дискретно-временными моделями кроме основного процесса следует моделировать поправочный процесс $\{\varepsilon_{j+1}\}$. Пусть I_{j+1} будет индикаторной функцией такой, что $I_{j+1} = 0$, если $r_{j+1} \geq 0$, и $I_{j+1} = 1$, если $r_{j+1} < 0$.

Соотношения (4.25) можно переписать так

$$\sigma_1 \sqrt{R(t) - x} \Delta t = \sqrt{2h_1 \left(D_r - D_l \frac{h_1}{h_1 + h_2} \right) \frac{R(t) - x}{\Theta - x}},$$

$$\sigma_2 \sqrt{R(t) - x} \Delta t = \sqrt{2h_2 D_l \frac{R(t) - x}{\Theta - x}}.$$

Тогда дискретно-временная аппроксимация (4.50) записывается в форме

$$r_{i+1} = (1-h_1)r_i + h_1 l_i + \sigma_1 \sqrt{r_i} \xi_i,$$

$$l_{i+1} = (1-h_2)l_i + h_2 \theta + \sigma_2 \sqrt{r_i} \eta_i. \quad (4.51)$$

Если процессы r_i и l_i начали эволюционировать с некоторого момента дискретного времени $i = j$, условия существования стационарного режима выполнены и $j \rightarrow -\infty$, тогда, используя равенства (4.50) как рекуррентные соотношения, стационарное решение можно записать в следующем виде:

$$r_{i+1} = \theta + \sigma_1 \sum_{j=0}^{\infty} (1-h_1)^j \sqrt{r_{i-j}} \xi_{i-j} + \sigma_2 h_1 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (1-h_1)^j (1-h_2)^k \sqrt{r_{i-j-k-1}} \eta_{i-j-k-1} =$$

$$= \theta + \sigma_1 \sum_{j=0}^{\infty} (1-h_1)^j \sqrt{r_{i-j}} \xi_{i-j} + \sigma_2 h_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-h_2)^{k+1} - (1-h_1)^{k+1}}{h_1 - h_2} \sqrt{r_{i-k-1}} \eta_{i-k-1},$$

$$l_{i+1} = \theta + \sigma_2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-h_2)^j \sqrt{r_{i-j}} \eta_{i-j}. \quad (4.52)$$

Из (4.52) сразу следует, что аналогично (4.22)

$$E[r_i] = E[l_i] = \theta.$$

Следовательно, процессы (4.15) и (4.50) имеют одинаковые стационарные математические ожидания. Чтобы вычислить стационарную дисперсию, нужно в соотношениях (4.52) перенести θ в левую часть равенства, затем равенства возвести в квадрат и вычислить математические ожидания. Поскольку случайные величины $\{\xi_i, \eta_i; i = 1, 2, \dots\}$ независимы в совокупности, имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии, при вычислении математических ожиданий от квадратов равенств в их правых частях останутся не математические ожидания от квадратов сумм, а только суммы математических ожиданий от квадратов слагаемых. И будем иметь

$$E[(r_i - \theta)^2] = \sigma_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-h_1)^{2j} \theta + \sigma_2^2 h_1^2 \theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-h_2)^{k+1} - (1-h_1)^{k+1}}{h_1 - h_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{\sigma_1^2 \theta}{1 - (1-h_1)^2} + \frac{\sigma_2^2 h_1^2 \theta [1 + (1-h_1)(1-h_2)]}{[1 - (1-h_1)^2][1 - (1-h_2)^2][1 - (1-h_1)(1-h_2)]},$$

$$E[(l_i - \theta)^2] = \sigma_2^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1-h_2)^{2j} \theta = \frac{\sigma_2^2 \theta}{1-(1-h_2)^2}. \quad (4.53)$$

Обозначим $D_1 \equiv E[(r_i - \theta)^2]$, $D_2 \equiv E[(l_i - \theta)^2]$, тогда из (4.53) получаем следующие выражения для этих дисперсий:

$$D_1 = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2h_1 - h_1^2} + D_2 \frac{h_1(2-h_1-h_2+h_1h_2)}{(2-h_1)(h_1+h_2-h_1h_2)}, \quad D_2 = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2h_2 - h_2^2}. \quad (4.54)$$

Заметим, что согласно сделанному выше замечанию о параметрах σ_1 и σ_2 в уравнениях (4.50) и равенствам (4.25), в выражениях (4.54) имеем следующие представления:

$$\sigma_1^2 = \frac{2h_1}{\theta} \left(D_r - D_l \frac{h_1}{h_1+h_2} \right), \quad \sigma_2^2 = \frac{2h_2}{\theta} D_l. \quad (4.55)$$

Из соотношений (4.54) и (4.55) получаем следующие формулы связи между дисперсиями D_1 и D_2 процессов дискретного времени (4.50) и дисперсиями D_r и D_l моделируемых непрерывных процессов (4.15):

$$D_1 = \frac{2}{2-h_1} \left(D_r - D_l \frac{h_1}{h_1+h_2} \right) + D_l \frac{2h_1(2-h_1-h_2+h_1h_2)}{(2-h_1)(2-h_2)(h_1+h_2-h_1h_2)}, \quad D_2 = \frac{2}{2-h_2} D_l. \quad (4.56)$$

Пусть параметры h_1 и h_2 являются малыми (из требования стационарности каждый из них меньше единицы) и $\max\{h_1, h_2\} = h$. Тогда формулы (4.56) можно переписать в виде, который в более удобной форме показывает связь между дисперсиями D_1 , D_2 и D_r , D_l :

$$D_1 = \left(1 + \frac{1}{2} h_1 \right) D_r + \frac{h_1}{h_1+h_2} \frac{h_1}{2} D_l + o(h), \quad D_2 = \left(1 + \frac{1}{2} h_2 \right) D_l + o(h_2). \quad (4.57)$$

Таким образом, у процессов (4.15) и (4.50) математические ожидания одинаковые, а дисперсии при переходе к дискретному времени несколько увеличиваются.

Ковариации процессов (4.52) вычисляются по следующим формулам:

$$\text{cov}(r_i, r_{i+\tau}) = \frac{\sigma_1^2 \theta (1-h_1)^{|\tau|}}{h_1(2-h_1)} + D_2 \frac{h_1^2 (1-h_2)^{|\tau|+1}}{(h_1-h_2)(h_1+h_2-h_1h_2)} - D_2 \frac{h_1 h_2 (2-h_2)(1-h_1)^{|\tau|+1}}{(2-h_1)(h_1-h_2)(h_1+h_2-h_1h_2)}, \quad (4.58)$$

$$\text{cov}(l_i, l_{i+\tau}) = D_2 (1-h_2)^{|\tau|}.$$

$$\text{cov}(r_i, l_{i+\tau}) = D_2 \frac{h_1 (1-h_2)^{\tau+1}}{h_1+h_2-h_1h_2}, \quad \tau > 0,$$

$$\text{cov}(r_{i+\tau}, l_i) = D_2 \frac{h_1 [(h_1+h_2-h_1h_2)(1-h_2)^\tau - h_2(2-h_2)(1-h_1)^\tau]}{(h_1+h_2-h_1h_2)(h_1-h_2)}, \quad \tau > 0. \quad (4.59)$$

Используя рассуждения, которые обосновали переход от формул (4.54) для дисперсий D_1 , D_2 к формулам (4.56) и (4.57), можно установить явное соответствие между ковариациями (4.23) и (4.24) непрерывных процессов (4.20), (4.21) и ковариациями (4.58), (4.59) их дискретно-временных аппроксимаций (4.52).

На рис. 4.1 в качестве иллюстрации представлены реализации процесса (4.50) для параметров h_1 и h_2 , различающихся в 10 раз.

Рассмотрим проблемы, возникающие при переходе к модели краткосрочной процентной ставки дискретного времени от модели краткосрочной процентной ставки непрерывного времени в более общем случае. Вначале рассмотрим одномерный процесс:

$$dr(t) = k \mu(r) dt + \sqrt{k \sigma^2(r)} dW(t), \quad (4.60)$$

$$\mu(r) = \left(\sum_{i=-m}^n \alpha_i r^i(t) \right), \quad \sigma^2(r) = \sum_{j=0}^l \beta_j r^j(t),$$

где k – положительный параметр масштаба времени; $\{\alpha, \beta\}$ – набор постоянных коэффициентов, определяющих полиномиальную структуру дрейфа и волатильности; $W(t)$ – винеровский процесс.

Основной особенностью этой модели по-прежнему является то, что при определенных предположениях модель (4.60) порождает только неотрицательные значения процентной ставки.

Обычно при переходе к дискретному времени инфинитезимальные приращения заменяются конечными (это так называемая дискретизация Эйлера (4.51)). Но при этом теряется свойство неотрицательности процентной ставки.

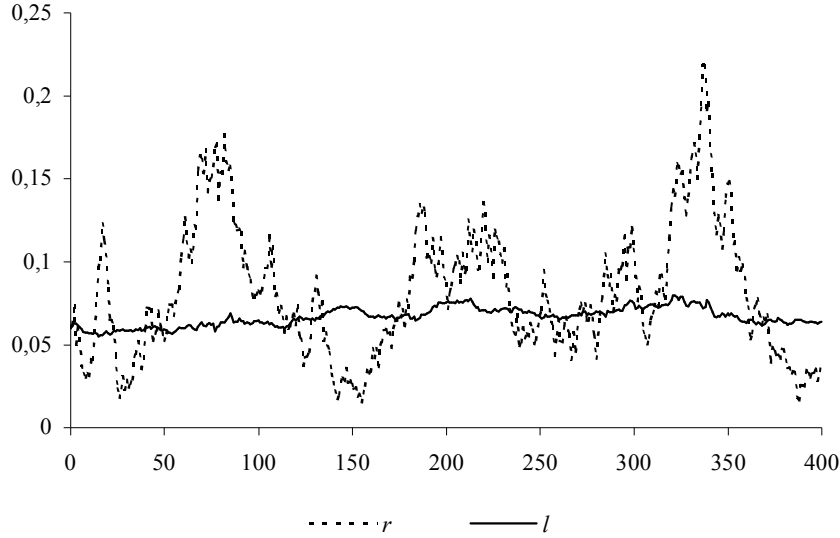


Рис. 4.1. Реализация двумерного процесса (4.50) для следующих значений параметров: $h_1 = 0,05$; $h_2 = 0,005$; $\theta = 0,06$; $D_r = 0,001$; $D_l = 0,0001$; $r_0 = 0,06$; $l_0 = 0,06$

Действительно, если вместо непрерывного времени в уравнении (4.60) принять дискретное время с временным шагом Δt , то текущее время можно записать как $t = j\Delta t$, а процентную ставку $r(t) = r(j\Delta t) \equiv r_j$. Тогда уравнение (4.60) переписывается в виде

$$r_{j+1} - r_j = \mu(r_j) k\Delta t + \sqrt{k\sigma^2(r_j)} (W_{j+1} - W_j). \quad (4.61)$$

Приращения винеровского процесса $(W_{j+1} - W_j)$ являются взаимно независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону с нулевыми средними и дисперсиями Δt . Поэтому, как и при получении соотношений (4.50) можно представить приращение $(W_{j+1} - W_j) = \sqrt{\Delta t}\xi_{j+1}$, где $\{\xi_j\}$ – последовательность взаимно независимых стандартных нормальных величин. Обозначим $h \equiv k\Delta t$. Тогда равенство (4.61) можно записать в виде

$$r_{j+1} = r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1}. \quad (4.62)$$

Из этого равенства следует, что при фиксированном r_j значение процентной ставки r_{j+1} оказывается отрицательным с положительной вероятностью

$$\Phi\left(-[r_j + h\mu(r_j)]/\sqrt{h\sigma^2(r_j)}\right).$$

Поэтому при моделировании процессов непрерывного времени дискретно-временными моделями, кроме основного процесса, нужно моделировать поправочный процесс $\{\varepsilon_{j+1}\}$. Пусть I_{j+1} будет индикаторной функцией такой, что $I_{j+1} = 0$, если $r_{j+1} \geq 0$, и $I_{j+1} = 1$, если $r_{j+1} < 0$. Тогда процесс $\{\varepsilon_{j+1}\}$ определим одним из двух следующих соотношений:

$$\varepsilon_{j+1} = -(r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1})I_{j+1},$$

когда реализуется принцип локального поглощения нулевым уровнем, или

$$\varepsilon_{j+1} = -2(r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1})I_{j+1},$$

когда реализуется принцип (зеркального) отражения от нулевого уровня.

При применении поправочного процесса ε_{j+1} вместо уравнения (4.62) следует использовать

$$r_{j+1} = r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1} + \varepsilon_{j+1}.$$

Заметим, что текущее среднее $\sum_{i=1}^{j+1} I_i / (j+1)$ является хорошим показателем того, как часто делаются поправки. Заметим также, что использование поправочного процесса эквивалентно соотношению

$$r_{j+1} = |r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1}| \quad (4.63)$$

при реализации зеркального отражения и соотношению

$$r_{j+1} = \max\{0, r_j + \mu(r_j)h + \sqrt{h\sigma^2(r_j)} \xi_{j+1}\} \quad (4.64)$$

при реализации локального поглощения нулевым уровнем.

Вообще говоря, при переходе от процесса непрерывного времени (4.60) к процессу (4.62), а тем более к (4.63) или (4.64) изменяется не только его свойство неотрицательности, но и меняется распределение вероятностей процесса. Поэтому процессы (4.62), (4.63) и (4.64) являются только аппроксимациями исходного процесса (4.60). Следовательно, оценивание параметров такого рода процессов по выборке дискретного времени, строго говоря, не является оцениванием параметров процесса (4.60).

Обсудим проблему оценивания параметров модели дискретного времени (4.62), когда она используется для аппроксимации реального наблюдаемого процесса процентной ставки $\{r_j\}$. Эту модель определяют $(n + m + l + 3)$ параметров: параметр масштаба времени h , $n + m + 1$ параметров дрейфа α и $l + 1$ параметров волатильности β . Согласно предположениям, величины

$$\xi_{j+1} = [r_{j+1} - r_j - \mu(r_j)h] / \sqrt{h\sigma^2(r_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

взаимно независимы и нормально распределены с нулевым средним и единичной дисперсией. Поэтому при заданной выборке $\{r_0, r_1, \dots, r_{N-1}\}$ можно записать функцию правдоподобия в виде

$$L(h, \{\alpha\}, \{\beta\} | r_0, r_1, \dots, r_{N-1}) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{[r_{j+1} - r_j - \mu(r_j)h]^2}{2h\sigma^2(r_j)}\right). \quad (4.65)$$

Параметры $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ определяют соответственно функцию дрейфа $\mu(r)$ и функцию волатильности $\sigma^2(r)$ согласно (4.60). По принципу максимального правдоподобия в качестве оценок параметров h , $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ нужно брать такие величины, которые доставляют максимум функции (4.65) или, что эквивалентно, минимум выражению

$$l(h, \{\alpha\}, \{\beta\} | r_0, r_1, \dots, r_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[r_{j+1} - r_j - \mu(r_j)h]^2}{2h\sigma^2(r_j)}. \quad (4.66)$$

Заметим, что выражение (4.66) допускает явную форму оценки параметра масштаба времени h . Действительно, выражение (4.66) можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[r_{j+1} - r_j]^2}{2\sigma^2(r_j)} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(r_{j+1} - r_j)\mu(r_j)}{\sigma^2(r_j)} + h \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[\mu(r_j)]^2}{2\sigma^2(r_j)}. \quad (4.67)$$

Значение h , минимизирующее это выражение, вычисляется по формуле

$$\hat{h} = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{[r_{j+1} - r_j]^2}{\sigma^2(r_j)}}{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{[\mu(r_j)]^2}{\sigma^2(r_j)}}}. \quad (4.68)$$

Подстановка (4.68) в (4.67) дает выражение, которое требуется минимизировать уже только по $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$:

$$2 \sqrt{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{[r_{j+1} - r_j]^2}{\sigma^2(r_j)}\right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{[\mu(r_j)]^2}{\sigma^2(r_j)}\right)} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(r_{j+1} - r_j)\mu(r_j)}{\sigma^2(r_j)}. \quad (4.69)$$

В общем случае выражение (4.69) минимизировать по $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ удастся только численными методами.

Двухмерный процесс (4.15) в более общей форме записывается как

$$\begin{aligned}dr(t) &= k_1 \mu(r, l) dt + \sqrt{k_1 \sigma^2(r)} dW_1(t), \\dl(t) &= k_2 \chi(r, l) dt + \delta \sqrt{k_2 \sigma^2(r)} dW_2(t).\end{aligned}\tag{4.70}$$

Здесь функции $\mu(r, l)$ и $\chi(r, l)$ уже полиномы, задаваемые двумя переменными:

ЛИТЕРАТУРА

- Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rate // *Econometrica*. Vol. 53. 1985. P. 385–467.
- Malkiel B. *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns*. Princeton: Princeton University, 1966.
- Moreno M. A Two-Mean Reverting-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates // Working paper. Pompeu Fabra University. 1996.
- Shiu E. S. W., Yao Y. Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models // *Proceedings of 9-th Intern. AFIR Symposium*. Tokio, 1999. P. 407–418.
- Vasiček O. A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure // *J. of Financial Economics*. Vol. 5. 1977. P. 177–188.