УДК 519

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

Г. А. Медведев

Белорусский государственный университет

MedvedevGA@bsu.by

В статье продолжается изучение диффузионных процессов Кокса – Ингерсолла – Росса как составных случайных процессов, значения которых, как известно, распределены в соответствии с гамма распределением. Однако переходные условные плотности имеют параметры, которые являются случайными величинами, имеющими пуассоновское распределение. Это приводит к тому, что совместное распределение процесса оказывается смешанным, причем смешивающие случайные величины имеют отрицательное биномиальное распределение соответствующей размерности. Находятся числовые характеристики этих смешивающих распределений. Определяются производящие функции моментов совместных распределений процесса Кокса – Ингерсолла – Росса до четвертого порядка включительно.

Среди случайных процессов, популярных в последнее время для моделирования стохастических процессов, происходящих на финансовых рынках, становятся так называемые процессы Бесселя [1], а точнее их квадраты. Для всяких $\delta \ge 0$ и $x_0 \ge 0$ единственное сильное решение уравнения

$$X(t) = x_0 + \delta t + 2\int_0^t \sqrt{|X(s)|}\, dW(t)$$

называется квадратом δ-мерного процесса Бесселя, стартующего из точки x_0. Число $\nu = \delta/2 - 1$ называют индексом процесса Бесселя. Можно доказать, что при $x_0 \ge 0$, $\delta \ge 0$ для всяких $t \ge 0$ решение $X(t)$ принимает только неотрицательные значения $X(t) \ge 0$, и в этом случае в уравнении символ абсолютного значения под корнем можно опустить. Пространственно-временное преобразование процесса Бесселя $X(t)$ $r(t) \equiv e^{bt} X(\sigma^2(1-e^{-bt})/4b)$ для $\delta = 4a/c^2$, $a \ge 0$, $b \in \mathrm{R}$, $\sigma > 0$, $t \ge 0$ называется процессом Кокса – Ингерсолла – Росса. Пространственно-временное преобразование процесса Бесселя $X(t)$ $S(t) \equiv X\left(\sigma^2\int_0^t \exp[2(\mu s + \sigma W(s))]ds\right)$ для $\delta = 2(1 + \mu/\sigma^2)$, $t \ge 0$ называется геометрическим броуновским движением. Эти два процесса играют важную роль в описании поведения индексов финансового рынка. Процесс $r(t)$ используется для моделирования динамики процентной ставки, а процесс $S(t)$ является математической моделью изменения цен акций. Процессы $r(t)$ и $S(t)$ порождаются соответственно стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dr(t) = (a + br(t))\, dt + \sigma\sqrt{r(t)}\, dW(t), \qquad dS(t) = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dW(t).$$

В дальнейшем мы обратимся к вероятностным свойствам Кокса – Ингерсолла – Росса [2], иногда называемым диффузионными процессами «с квадратным корнем». При $b < 0$ существует стационарный режим процесса $r(t)$ с математическим ожиданием θ, стационарной дисперсией D и коэффициентом корреляции $e^{-k|t-s|}$ для $r(t)$ и $r(s)$. Поэтому для практического анализа процесса $r(t)$ уравнение для него удобнее записать в форме

$$dr(t) = k\,(\theta - r(t))\, dt + \sqrt{2kDr(t)/\theta}\, dW(t). \tag{1}$$

Связь между наборами параметров a, b, σ и k, θ, D легко установить путем сопоставления соответствующих уравнений. Оказывается, что распределение вероятностей процесса (1) является гамма распределением, а совместные и условные распределения являются смешанными распределениями гамма распределений, в которых параметр формы является смешивающей случайной величиной [3].

Введем обозначения:

$g(x|q,\ c) \equiv \dfrac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}$ – плотность вероятностей гамма распределения с параметром формы q и параметром масштаба c, $x \ge 0$; если $X \sim g(x|q, c)$, тогда $E[X] = q/c$, $\mathrm{Var}[X] = q/c^2$;

$p(j|\lambda) \equiv \dfrac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$ – пуассоновское распределение вероятностей с параметром $\lambda > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; если $J \sim p(j|\lambda)$, тогда $E[J] = \mathrm{Var}[J] = \lambda$;

$b(j|q,\ b) \equiv \dfrac{\Gamma(q+j)}{j!\ \Gamma(q)} b^j (1-b)^q$ – отрицательное биномиальное распределение вероятностей с параметрами $q > 0$, $b \in (0,1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; если $J \sim b(j|q, b)$, тогда $E[J] = qb/(1-b)$, $\mathrm{Var}[J] = qb/(1-b)^2$;

Ниже для краткости случайные величины и их значения обозначаются одинаковыми символами.

Утверждение 1 [3]. Двухмерная плотность вероятностей $f(r, t; R, s)$ значений процентной ставки $r(t)$, $r(t) = r$, $r(s) = R$, $s < t$, имеет представление для $r \ge 0$, $R \ge 0$:

$$f(r,\,t;\,R,\,s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j\,|\,q,\,e^{-k(t-s)})g(r\,|\,q+j,c)g(R\,|\,q+j,c); \qquad (2)$$

условная плотность вероятностей $f\,(r,\,t|r(s) = R),\;\; s < t$, имеет вид:

$$f\,(r,\,t\,|\,R,\,s)\;=\;\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u^j}{j!}e^{-u}\,\frac{c^{q+j}r^{q+j-1}}{\Gamma(q+j)}\;e^{-cr}\;=\;\sum_{j=0}^{\infty}p(j|u)g(r\,|\,q+j,c), \qquad r\,\ge 0, \qquad (3)$$

где обозначено $u = \dfrac{\theta R}{D(e^{k(t-s)}-1)},\quad c = \dfrac{\theta}{D(1-e^{-k(t-s)})},\quad q = \dfrac{\theta^2}{D}.$

При тех же условиях маргинальная плотность вероятностей $f\,(r,\,t)$ является плотностью распределения гамма с параметром формы q и параметром масштаба $c_0 = \lim\limits_{(t-s)\to\infty} c\; = \;\theta/D$

$$f\,(r,\,t)\;=\;\frac{c_0^q r^{q-1}}{\Gamma(q)}\;e^{-c_0 r}, \qquad r\,\ge 0. \qquad (4)$$

Ниже эти результаты обобщаются на трехмерный и четырехмерный случай.

Прежде, чем переходить к анализу этих более общих случаев, дадим интерпретацию полученных результатов. Как видно из формул (2) и (3) совместная и условная плотности вероятностей отсчетов случайного процесса (1) являются смесью гамма плотностей. В том и другом случае случайная смешивающая переменная, назовем ее J, принимает целочисленные значения и в случае условной плотности имеет пуассоновское распределение, параметр которого определяется не только моментами времени s и t, но и значением отсчета случайного процесса в момент условия $r(s) = R$. В случае совместной плотности смешивающая переменная J имеет отрицательное биномиальное распределение вероятностей с параметрами, зависящими только от параметров уравнения (1): θ, D и коэффициента корреляции $e^{-k|t-s|}$. Заметим, что некоторые авторы называют случайные величины, имеющие плотности типа (2), условно независимыми случайными величинами, имея в виду тот факт, что при фиксированных значениях смешивающей переменной совместная плотность вероятностей случайных величин является произведением их плотностей. Отметим также, что представления плотностей в форме (2) и (3) являются удобными для вычисления производящих функций моментов.

Для моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ обозначим $r(t_i) \equiv r_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, а также $\rho_{il} \equiv \exp[-\,k(t_i - t_l)]$, $c_{il} \equiv c_0/(1 - \rho_{il})$; $i > l$; $i, l = 1, 2, 3, 4$; $u_i \equiv c_0\,\rho_{i+1,i}\,r_i\,/(1 - \rho_{i+1,i})$, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что при этих обозначениях для всяких $j > i > l$ имеет место равенство $\rho_{ji}\rho_{il} = \rho_{jl}$.

Утверждение 2. Трехмерная совместная плотность вероятностей $f(r_1,\,r_2,\,r_3)$ значений процентной ставки имеет представление для $r_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3$:

$$f(r_1,\,r_2,\,r_3) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b(j,k\,|\,q,\,\alpha,\beta)g(r_1\,|\,q+j,c_{21})g(r_2\,|\,q+j+k,c_{21}+c_{32}-c_0)g(r_3\,|\,q+k,c_{32}), \qquad (5)$$

где $b(j,\;k\;|\;q,\;\alpha,\;\beta)\;=\;\dfrac{\Gamma(j+k+q)}{j!\,k!\,\Gamma(q)}\alpha^j\beta^k(1-\alpha-\beta)^q$ – двумерное отрицательное биномиальное распределение,

$$0<\alpha=\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}=\frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}}<1,\;\;0<\beta=\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}=\frac{\rho_{32}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}}<1.$$

Доказательство этого утверждения основывается на использовании марковского свойства процесса (1), заключающегося в том, что совместная плотность вероятностей любого порядка может быть представлена в форме произведения условных плотностей вероятностей вида (3), т.е.

$$f(r_1,\,t_1;\,r_2,\,t_2;\,\ldots,\,r_n,\,t_n) = f(r_1,\,t_1)\prod_{i=2}^{n} f\,(r_i,t_i\,|\,r_{i-1},t_{i-1}). \qquad (6)$$

Покажем, как это может быть сделано для случая утверждения 2. Выпишем (6) в явной форме при помощи использования формул (3) и (4). Для краткости записи будем опускать в аргументах временные переменные.

$$f(r_1,\,r_2,\,r_3) = \frac{c_0^q r_1^{q-1}}{\Gamma(q)}\;e^{-c_0 r_1}\;\sum_{j=0}^{\infty}p(j\,|\,u_1)g(r_2\,|\,q+j,c_{21})\;\sum_{k=0}^{\infty}p(k\,|\,u_2)g(r_3\,|\,q+k,c_{32}) =$$

$$= \frac{c_0^q r_1^{q-1}}{\Gamma(q)}\;e^{-c_0 r_1}\;\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{c_0 r_1\rho_{21}}{1-\rho_{21}}\right)^j \exp\left(-\frac{c_0 r_1\rho_{21}}{1-\rho_{21}}\right)\times\frac{c_{21}^{\;q+j}\,r_2^{\;q+j-1}}{\Gamma(q+j)}\;e^{-c_{21}r_2}\;\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{c_0 r_2\rho_{32}}{1-\rho_{32}}\right)^k \exp\left(-\frac{c_0 r_2\rho_{32}}{1-\rho_{32}}\right)\times\frac{c_{32}^{\;q+k}\,r_3^{\;q+k-1}}{\Gamma(q+k)}\;e^{-c_{32}r_3} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_1^{\,j+q-1}}{\Gamma(j+q)}\left(\frac{c_0}{1-\rho_{21}}\right)^{j+q}\exp\left(-\frac{c_0 r_1}{1-\rho_{21}}\right)\times\frac{r_2^{\,j+k+q-1}}{\Gamma(j+k+q)}\left(c_0\,\frac{1+\rho_{32}}{1-\rho_{32}}\right)^{j+k+q}\exp\left(-c_0\,\frac{1+\rho_{32}}{1-\rho_{32}}r_2\right)\times$$

$$\times\frac{r_3^{k+q-1}}{\Gamma(k+q)}\left(\frac{c_0}{1-\rho_{32}}\right)^{k+q}\exp\left(-\frac{c_0}{1-\rho_{32}}r_3\right)\times\frac{\Gamma(j+k+q)}{j!k!\Gamma(q)}\left(\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^j\left(\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^k\left(\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^q=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+k+q)}{j!k!\Gamma(q)}\left(\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^j\left(\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^k\left(\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}\right)^q\times \tag{7}$$

$$\times g(r_1\,|\,q+j,c_{21})g(r_2\,|\,q+j+k,c_{21}+c_{32}-c_0)g(r_3\,|\,q+k,c_{32}).$$

Таким образом, из представления (7) видно, что совместная плотность трех значений $r(t_1)$, $r(t_2)$, $r(t_3)$ случайного процесса (1) является смесью гамма плотностей, причем смешивающих случайных величин здесь уже две J и K, и они подчиняются двухмерному отрицательному биномиальному распределению вероятностей с параметрами, зависящими только от коэффициентов корреляции ρ_{il}. Таким образом, по существу, нами доказано

Следствие 1. Смешивающими случайными величинами трехмерной совместной плотности вероятностей значений процесса (1) являются случайные величины J и K, имеющие двухмерное отрицательное биномиальное распределение вероятностей

$$\frac{\Gamma(j+k+q)}{j!k!\Gamma(q)}\alpha^j\beta^k(1-\alpha-\beta)^q,\quad 0\le j\le\infty,\ 0\le k\le\infty, \tag{8}$$

с параметрами $0\le\alpha=\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}=\frac{\rho_{21}-\rho_{31})}{1-\rho_{31}}\le 1,\quad 0\le\beta=\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}=\frac{\rho_{32}-\rho_{31})}{1-\rho_{31}}\le 1$, которые зависят только от корреляционных свойств случайного процесса (1). Непосредственные вычисления показывают, что смешивающие случайные величины J и K имеют следующие первые и вторые моменты:

$$E[J]=\frac{q\rho_{21}}{1-\rho_{21}},\ E[K]=\frac{q\rho_{32}}{1-\rho_{32}},\ \mathrm{Var}[J]=\frac{q\rho_{21}}{(1-\rho_{21})^2},\ \mathrm{Var}[K]=\frac{q\rho_{32}}{(1-\rho_{32})^2},$$

$$\mathrm{Cov}[J,K]=\frac{q\rho_{32}\rho_{21}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})},\ \mathrm{Corr}[J,K]=\sqrt{\rho_{32}\rho_{21}}=\sqrt{\rho_{31}}\ .$$

Здесь через $\mathrm{Corr}[J, K]$ обозначен коэффициент корреляции случайных величин J и K.

Утверждение 3. Четырехмерная плотность вероятностей $f(r_1, r_2, r_3, r_4)$ значений случайного процесса (1) имеет представление для $r_i\ge 0$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}b(j,k,l\,|\,q,\ \alpha,\beta,\gamma)g(r_1\,|\,q+j,c_{21})g(r_2\,|\,q+j+k,c_{21}+c_{32}-c_0)\times$$

$$\times g(r_3\,|\,q+k+l,c_{32}+c_{43}-c_0)g(r_4\,|\,q+l,c_{43}). \tag{9}$$

Здесь

$$b(j,k,l\,|\,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\frac{\Gamma(j+k+q)\Gamma(k+l+q)}{j!\,k!\,l!\,\Gamma(q)\Gamma(k+q)}\alpha^j\beta^k\gamma^l\delta^q, \tag{10}$$

где обозначено $0\le\alpha\equiv\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}}=\frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}}\le 1,\quad 0\le\beta\equiv\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})(1-\rho_{43})}{(1-\rho_{32}\rho_{21})(1-\rho_{43}\rho_{32})}=\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})(1-\rho_{43})}{(1-\rho_{31})(1-\rho_{42})}\le 1,$

$$0\le\gamma\equiv\frac{\rho_{43}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{43}\rho_{32}}=\frac{\rho_{43}-\rho_{42}}{1-\rho_{42}}\le 1,\quad 0\le\delta\equiv\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})(1-\rho_{43})}{(1-\rho_{32}\rho_{21})(1-\rho_{43}\rho_{32})}=\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})(1-\rho_{43})}{(1-\rho_{31})(1-\rho_{42})}\le 1.$$

Доказательство утверждения 3 можно провести также, как это было сделано для утверждения 2.

Трехмерным отрицательным биномиальным распределением естественно называть распределение

$$\frac{\Gamma(j+k+l+q)}{j!\,k!\,l!\,\Gamma(q)}\alpha^j\beta^k\gamma^l(1-\alpha-\beta-\gamma)^q \tag{11}$$

в случае $0\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1,\ 0\le\gamma\le 1,\ 0\le\alpha+\beta+\gamma\le 1,\ q>0,\ 0\le j\le\infty,\ 0\le k\le\infty,\ 0\le l\le\infty.$

Функция $b(j, k, l\,|\,q, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, определяемая выражением (10), является распределением вероятностей, так как она принимает неотрицательные значения, а ее суммирование по всем значениям индексов j, k, l приводит к 1. Вместе с тем она отличается от представления (11) не только тем, что в ней вместо $\Gamma(j + k + l + q)$ используется $\Gamma(j+k+q)\Gamma(k+l+q)/\Gamma(k+q)$, но и тем, что в (10) $\delta\ne 1-(\alpha+\beta+\gamma)$. Однако суммирование выражения (10) по одному из индексов приводит к двухмерному отрицательному биномиальному распределению вероятностей вида (8). Так что в некотором смысле также можно функцию $b(j, k, l\,|\,q, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ тоже называть трехмерным отрицательным биномиальным распределением.

Четырехмерная плотность вероятностей $f(r_1, r_2, r_3, r_4)$ значений случайного процесса (1) снова является смесью гамма распределений, а смешивающих случайных величин здесь уже три: J, K, L. Они подчиняются трехмерному распределению вероятностей с параметрами, зависящими только от коэффициентов корреляции.

Следствие 2. Смешивающими случайными величинами четырехмерной совместной плотности вероятностей значений процесса (1) являются случайные величины J, K и L, имеющие распределение вероятностей (10). Непосредственные вычисления показывают, что смешивающие случайные величины J, K и L имеют следующие первые и вторые моменты.

Математические ожидания смешивающих случайных величин J, K и L

$$E[J] = \frac{q\rho_{21}}{1-\rho_{21}},\ E[K] = \frac{q\rho_{32}}{1-\rho_{32}},\ E[L] = \frac{q\rho_{43}}{1-\rho_{43}}.$$

Матрица ковариаций смешивающих случайных величин J, K и L

$$\mathrm{Cov}[J, K, L] = \begin{pmatrix} \frac{q\rho_{21}}{(1-\rho_{21})^2} & \frac{q\rho_{31}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})} & \frac{q\rho_{41}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{43})} \\ \frac{q\rho_{31}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})} & \frac{q\rho_{32}}{(1-\rho_{32})^2} & \frac{q\rho_{42}}{(1-\rho_{32})(1-\rho_{43})} \\ \frac{q\rho_{41}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{43})} & \frac{q\rho_{42}}{(1-\rho_{32})(1-\rho_{43})} & \frac{q\rho_{43}}{(1-\rho_{43})^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов корреляции смешивающих случайных величин J, K и L

$$\mathrm{Corr}[J, K, L] = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\rho_{31}} & \sqrt{\rho_{31}\rho_{42}} \\ \sqrt{\rho_{31}} & 1 & \sqrt{\rho_{42}} \\ \sqrt{\rho_{31}\rho_{42}} & \sqrt{\rho_{42}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно получить выражения для производящих функций моментов распределений вероятностей случайного процесса (1).

Известно, что производящая функция моментов $M(\tau)$ гамма распределения (4) имеет вид

$$M(\tau) = E[\exp(\tau r(t))] = \left(\frac{c_0}{c_0-\tau}\right)^q = \left(1-\frac{\tau}{c_0}\right)^{-q}, \quad \tau < c_0. \tag{12}$$

Утверждение 4 [3]. Производящая функция моментов $M(\tau_1, \tau_2)$ совместного распределения (2) имеет вид

$$M(\tau_1, \tau_2) = E[\exp(\tau_1 r(t_1) + \tau_2 r(t_2))] = \left(\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_2}{c_0}\right) - \rho_{21}\frac{\tau_1\tau_2}{c_0^2}\right)^{-q}, \text{ при } \frac{c_0-\tau_1}{\tau_1}\frac{c_0-\tau_2}{\tau_2} > \rho_{21}.$$

Утверждение 5. Производящая функция моментов $M(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv E[\exp(r_1\tau_1 + r_2\tau_2 + r_3\tau_3)]$ трехмерного распределения $f(r_1, r_2, r_3)$ имеет вид

$$M(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \left(\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_2}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_3}{c_0}\right) - \rho_{21}\frac{\tau_1\tau_2}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_3}{c_0}\right) - \rho_{32}\frac{\tau_3\tau_2}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right) - \rho_{31}\frac{\tau_1\tau_3}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_2}{c_0}\right)\right)^{-q} \tag{13}$$

в области, определяемой неравенством $\frac{c_0-\tau_1}{\tau_1}\frac{c_0-\tau_2}{\tau_2}\frac{c_0-\tau_3}{\tau_3} > \rho_{21}\frac{c_0-\tau_3}{\tau_3} + \rho_{32}\frac{c_0-\tau_1}{\tau_1} + \rho_{31}\frac{c_0-\tau_2}{\tau_2}$.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что значения случайного процесса (1) в различные моменты времени являются условно независимыми в упомянутом выше смысле. Так что согласно (5)

$$E[\exp(r_1\tau_1 + r_2\tau_2 + r_3\tau_3)] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b(j,k\,|\,q,\alpha,\beta) M(\tau_1\,|\,q+j, c_{21}) M(\tau_2\,|\,q+j+k, c_{21}+c_{32}-c_0) M(\tau_3\,|\,q+k, c_{32}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b(j,k\,|\,q,\alpha,\beta)\left(1-\frac{\tau_1}{c_{21}}\right)^{-j-q}\left(1-\frac{\tau_2}{c_{21}+c_{32}-c_0}\right)^{-j-k-q}\left(1-\frac{\tau_3}{c_{32}}\right)^{-k-q} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b(j,k\,|\,q,\alpha,\beta)\left(1-(1-\rho_{21})\frac{\tau_1}{c_0}\right)^{-j-q}\left(1-\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}{1-\rho_{31}}\frac{\tau_2}{c_0}\right)^{-j-k-q}\left(1-(1-\rho_{32})\frac{\tau_3}{c_0}\right)^{-k-q}. \tag{14}$$

Для всяких $0 < x < 1$, $y > 0$ имеет место равенство $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+y)}{j!}x^j = \frac{\Gamma(y)}{(1-x)^y}$ (его можно рассматривать как условие нормировки отрицательного биномиального распределения).

Используя это равенство, вычислим в (14) сумму слагаемых, зависящих от индекса j,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+k+q)}{j!}\left[\left(\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{31}}\right)\left(1-(1-\rho_{21})\frac{\tau_1}{c_0}\right)^{-1}\left(1-\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}{(1-\rho_{31})}\frac{\tau_2}{c_0}\right)^{-1}\right]^j =$$

$$= \Gamma(k+q)\left[1-\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{[1-(1-\rho_{21})\tau_1/c_0][1-\rho_{31}-(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})\tau_2/c_0]}\right]^{-k-q}.$$

Аналогичным образом вычислим в (14) сумму слагаемых, зависящих от индекса k,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+q)}{k!}\left[\left(\frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{31}}\right)\left(1-(1-\rho_{32})\frac{\tau_3}{c_0}\right)^{-1}\left(1-\frac{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}{(1-\rho_{31})}\frac{\tau_2}{c_0}\right)^{-1}\right]^{k}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{[1-(1-\rho_{21})\tau_1/c_0][1-\rho_{31}-(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})\tau_2/c_0]}\right]^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+q)}{k!}\left[\rho_{21}(1-\rho_{32})\left(\left(1-(1-\rho_{32})\frac{\tau_3}{c_0}\right)\left(1-\rho_{31}-(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})\frac{\tau_2}{c_0}\right)-\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})(1-(1-\rho_{32})\tau_3/c_0)}{1-(1-\rho_{21})\tau_1/c_0}\right)^{-1}\right]^{k} =$$

$$= \Gamma(q)\left[\frac{\left(1-(1-\rho_{32})\frac{\tau_3}{c_0}\right)\left(1-\rho_{31}-(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})\frac{\tau_2}{c_0}\right)-\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})(1-(1-\rho_{32})\tau_3/c_0)}{1-(1-\rho_{21})\tau_1/c_0}}{\left(1-(1-\rho_{32})\frac{\tau_3}{c_0}\right)\left(1-\rho_{31}-(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})\frac{\tau_2}{c_0}\right)-\frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})(1-(1-\rho_{32})\tau_3/c_0)}{1-(1-\rho_{21})\tau_1/c_0}-\rho_{21}(1-\rho_{32})}\right]^{q}.$$

Теперь осталось подставить полученное выражение в (14) вместо сумм по индексам j и k и, учитывая оставшиеся сомножители в (14), не зависящие от этих индексов, упростить выражение (14). В результате получается выражение (13).

Утверждение 6. Производящая функция моментов $M(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv E[\exp(r_1\tau_1 + r_2\tau_2 + r_3\tau_3 + r_4\tau_4)]$ четырехмерного распределения $f(r_1, r_2, r_3, r_4)$ имеет вид

$$M(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \left[\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_2}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_3}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_4}{c_0}\right)-\rho_{21}\frac{\tau_1\tau_2}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_3}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_4}{c_0}\right)-\rho_{32}\frac{\tau_3\tau_2}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_4}{c_0}\right)-\right.$$

$$-\rho_{43}\frac{\tau_3\tau_4}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_2}{c_0}\right)-\rho_{31}\frac{\tau_1\tau_3}{c_0^2}\left(1+\frac{\tau_2}{c_0}\right)\left(1-\frac{\tau_4}{c_0}\right)-\rho_{42}\frac{\tau_2\tau_4}{c_0^2}\left(1-\frac{\tau_1}{c_0}\right)\left(1+\frac{\tau_3}{c_0}\right)+$$

$$\left.+\rho_{21}\rho_{43}\frac{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}{c_0^4}-\rho_{41}\frac{\tau_1\tau_4}{c_0^2}\left(1+\frac{\tau_2}{c_0}\right)\left(1+\frac{\tau_3}{c_0}\right)\right]^{-q}. \quad (15)$$

Функция $M(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ определена в области таких значений τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, для которых выражение в квадратных скобках формулы (15) является строго положительным.

Доказательство формулы (15) производится таким же способом, как это сделано в доказательстве предыдущего утверждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Göing-Jaeschke, A., Yor, M.* A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes // Working paper. ETH Zurich, Department of Mathematics, 1999.

2. *Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rate // Econometrica. 1985. No. 2.

3. *Медведев. Г. А.* Математические основы финансовой экономики. Часть 2. Определение рыночной стоимости активов. – Минск: БГУ, 2003.