СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Г. А. Медведев

Белорусский государственный университет

Финансовая математика – это совокупность математических методов, позволяющих решать задачи, возникающие на финансовом рынке. Одной из популярных проблем, решаемых финансовой математикой, является проблема инвестиций, которую можно кратко сформулировать так: куда и как лучше всего вложить свободные деньги.

Когда рынок прозрачен и стабилен, точнее детерминирован, тогда в силу уже сложившихся правил и законов финансового рынка определено, что участник рынка, вложивший в момент времени $t = 0$ сумму $S(0)$ в некоторый финансовый проект (контракт) продолжительностью T, получит после выполнении этого проекта, т.е. в момент времени T, сумму

$$S(T) = [1 + R(T)]S(0) > S(0);\ R(T) > 0.$$

Не вдаваясь в подробности, заметим, что это соотношение можно записать в более удобной для анализа форме

$$S(T) = e^{\int_0^T r(t)dt} S(0), \quad \int_0^T r(t)dt = \ln[1 + R(T)].$$

Величину $r(t)$ принято называть процентной ставкой доходности. Сумму $S(0)$ можно назвать ценой контракта, гарантирующего получение суммы $S(T)$ через время T, и определить ее как $S(0) = \left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\}S(T)\right]$.

Так что, когда функция $r(t)$ известна, проблема вычисления цены проста.

Предположим, что рыночная ситуация является неопределенной, а процентные ставки стохастичны. Тогда определение стоимости финансовых контрактов становится непростой задачей. Возникает аналогия: можно полагать, что ожидаемая (или средняя) цена такого контракта может быть вычислена по формуле

$$E_0\left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\}S(T)\right], \tag{1}$$

где E_0 оператор математического ожидания, условного по отношению к информации на момент времени 0. Однако это не всегда так. Оказывается, что можно лишь сказать, что на справедливом финансовом рынке (рынке без арбитража) действительно существует вероятностная мера, относительно которой эта формула верна, но эта мера не определяет рыночные процессы так, как мы их наблюдаем на финансовом рынке относительно реальной меры. Так как же определить цену контракта на реальном финансовом рынке? Рассмотрим эту проблему на примере определения цены облигации. Рассмотрим рынок, где инвесторы покупают и выпускают для продажи свободные от неуплаты ценные бумаги на фиксированную сумму денег, которая должна быть доставлена в заданную дату в будущем. Такие бумаги будем называть (дисконтными) облигациями. Пусть $P(t,T)$ обозначает цену, наблюдаемую в момент времени t, $t \le T$, дисконтной облигации, погашаемой в момент времени T, с единичной стоимостью погашения $P(T, T) = 1$.

Доходность до погашения $y(t, T)$ является внутренней нормой отдачи в момент t на облигацию с датой погашения T:

$$y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T), \qquad t < T .$$

Ставки $y(t, t+\tau)$, $\tau = T - t > 0$, рассматриваемые как функции τ, будут называться временной структурой в момент времени t.

Теперь определим краткосрочную процентную ставку как мгновенную ставку: $r(t) = y(t,t) = \lim_{\tau\to 0} y(t, t+\tau)$.

Поэтому сумма счета V при краткосрочной ставке $r(t)$ будет увеличиваться по стоимости посредством приращений $dV = Vr(t)dt$. Это равенство выполняется с достоверностью. В любой момент времени t текущее значение $r(t)$ краткосрочной ставки является мгновенной ставкой увеличения стоимости счета.

Однако значения краткосрочной ставки в последовательные интервалы времени необязательно оказываются вполне определенными. Мы предполагаем, что ставка $r(t)$ – это стохастический процесс, подчиняющийся двум требованиям: во-первых, $r(t)$ является непрерывной функцией времени, т. е. она не изменяется по величине скачкообразно; во-вторых, предполагается, что она следует марковскому процессу.

Таким образом, делается следующее предположение.

(А.1). Краткосрочная ставка следует непрерывному марковскому процессу. Марковское свойство подразумевает то, что будущее развитие процесса краткосрочной ставки характеризуется скалярной переменной состояния, которой является ее текущая величина.

Непрерывные марковские процессы обычно описываются стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$dr = \mu_r(r, t)\, dt + \sigma_r(r, t)\, dW(t), \tag{2}$$

где $dW(t)$ является приращением стандартного винеровского процесса. Функции $\mu_r(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$ называются соответственно мгновенными дрейфом и волатильностью процесса $r(t)$.

(А.2). Цена $P(t,T)$ дисконтированной облигации в момент t определяется через оценку будущих значений $\{r(s),\ t \le s \le T\}$ процесса краткосрочной ставки в течение срока действия облигации.

(А.3). Рынок является эффективным, т. е. нет никаких расходов на сделки, информация доступна всем инвесторам одновременно и каждый инвестор действует рационально (предпочитает большее богатство меньшему и использует всю доступную информацию).

Таким образом, значение краткосрочной процентной ставки является единственной переменной состояния для всей временной структуры. Ожидания, образованные знанием всего прошлого развития ставок всех сроков погашения, включая настоящую временную структуру, эквивалентны условным ожиданиям при фиксированном настоящем значении краткосрочной ставки.

Из уравнения (2) по правилу дифференцирования Ито следует, что цена облигации удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dP = P\,\mu_P\,(t,\,T)\,dt - P\,\sigma_P\,(t,\,T)\,dW(t),$$

где параметры $\mu_P(t,\,T) = \mu_P(t,\,T,\,r(t))$, $\sigma_P(t,\,T) = \sigma_P(t,\,T,\,r(t))$ задаются формулами

$$\mu_P(t,T,r) = \frac{1}{P(t,T,r)}\left[\frac{\partial}{\partial\, t} + \mu_r\frac{\partial}{\partial\, r} + \frac{1}{2}\sigma_r^{\,2}\frac{\partial^2}{\partial\, r^2}\right]P(t,T,r),$$

$$\sigma_P(t,T,r) = -\frac{1}{P(t,T,r)}\sigma_r\frac{\partial}{\partial\, r}P(t,T,r).$$

Функции $\mu_P(t,\,T,\,r)$, $\sigma_P(t,\,T,\,r)$ соответственно являются дрейфом и волатильностью мгновенной ставки доходности в момент времени t на облигацию с датой погашения T при условии, что текущая краткосрочная ставка равна $r(t) = r$. Поскольку арбитражные возможности исключаются предположением (A.3), отношение превышения ожидаемой доходности μ_P над краткосрочной ставкой r к волатильности σ_P должно не зависеть от срока погашения T, т. е.

$$\frac{\mu_P(t,T,r) - r}{\sigma_P(t,T,r)} = \lambda(t,r), \qquad t \le T. \tag{3}$$

Величина $\lambda(t,\,r)$ может быть названа рыночной ценой риска, так как она определяет увеличение ожидаемой мгновенной ставки доходности облигации на единицу риска. Используя равенство (3), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r + \sigma_r\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^{\,2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t \le T. \tag{4}$$

Уравнение (4) является основным уравнением для определения цен облигаций на рынке, который характеризуется предположениями (A.1), (A.2), (A.3). Оно имеет много названий, одно из которых – «*уравнение временной структуры*».

Решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического и эллиптического типа, таких как уравнение (4), может быть представлено в интегральной форме через лежащий в основе стохастический процесс, как говорят в форме стохастического представления Фейнмана – Каца:

$$P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\tau, r(\tau))d\tau + \int_t^T \lambda(\tau, r(\tau))dW(t) \right), \quad t \le T.$$

Отсюда видно, что только при $\lambda = 0$ цена облигации определяется выражением $P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau \right)$. При этом говорят, что математическое ожидание вычисляется по нейтральной к риску вероятностной мере.

До сих пор мы говорили только об одной ценной бумаге – облигации, но участники финансового рынка (инвесторы) обычно производят торговые сделки не с какой-то отдельной ценной бумагой, а с портфелем ценных бумаг. Проблема определения цены портфеля и его эффективной модификации – более сложная задача. Задачу выбора оптимального портфеля и стратегии потребления можно представить следующим образом. Инвесторы на финансовом рынке согласно своим предпочтениям, определяемым функций полезности U, в течение периода времени $[0, T]$ стараются оптимальным образом увеличивать свое богатство B, одновременно потребляя его часть согласно норме потребления C, путем приобретения портфеля ценных бумаг из одной безрисковой и нескольких рисковых согласно долям, составляющим в некоторый момент времени t вектор $w(t)$. Это приводит к задаче:

$$\max E_0 \left\{ \int_0^T \exp(-\rho t) u[C(t)]dt + U[B(T), T] \right\}; \tag{5}$$

при ограничениях бюджета (в простейшем случае одной рисковой бумаги)

$$dB = \{[w(t)(\alpha - r) + r]B(t) - C(t_0)\}dt + w(t)\sigma B(t)\, dW(t),\ C(t) \ge 0,\ B(t) > 0.$$

Функции полезности строго вогнуты; T – дата окончания периода инвестирования; α и r – доходности рисковой и безрисковой бумаг, соответственно.