

# О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

*Г. А. Медведев*

*Белорусский государственный университет*

Обычно используемыми математическими моделями изменения во времени процентных ставок на финансовом рынке являются диффузионные процессы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Решения линейных стохастических уравнений, как правило, можно выписать в явной форме. Однако получение решений в явной форме для нелинейных уравнений проблема более сложная. Вместе с тем для некоторых таких процессов могут быть найдены как маргинальные, так и совместные распределения вероятностей. Оказывается, что эти распределения относятся к классу смешанных распределений. Причем при фиксированных значениях смешивающей случайной величины отсчеты процесса независимо распределены. Ниже будут изложены некоторые результаты по этой проблематике.

Будем рассматривать такие случайные процессы процентных ставок  $r(t)$ , которые допускают существование стационарного режима со стационарным математическим ожиданием  $E[r(t)] = E$  и стационарной дисперсией  $\text{Var}[r(t)] = V$ . В классическом анализе обычно предполагалось, что процентная ставка доходности финансовых активов имеет нормальное распределение с однородными по времени независимыми приращениями и стационарными параметрами. Наиболее известной моделью динамики такой процентной ставки  $r(t)$  является модель Васичека [1] (нормальная модель), когда процесс  $r(t)$  порождается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = k(E - r(t))dt + \sqrt{2kV} dW(t).$$

Смысл параметра  $k$  разъясняется ниже, а  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс. Однако выборочные характеристики временных рядов, соответствующих такой модели, оказываются часто несовместимыми с характеристиками процесса  $r(t)$  этой модели. Одно из более важных отличий – то, что эм-

пирические распределения изменения процентной ставки часто слишком «островершинные», асимметричные и имеют тяжелые правые хвосты, что не совместимо с нормальным распределением; наибольшие частоты наблюдаемых значений слишком велики, чтобы быть совместимыми с выборками из нормального распределения. Кроме того, рыночная процентная ставка, обычно, положительная, а нормальное распределение определено на всей числовой оси.

Устранить эти несоответствия пытались двумя различными способами. Первый хотя и предполагал независимые приращения и предположения стационарности, но заменял предположение о нормальности более общим предположением о распределениях, устойчивых в смысле Парето – Леви. Хотя негауссовы члены устойчивого семейства распределений часто аппроксимируют хвосты эмпирических распределений лучше, чем нормальное, эмпирическое подтверждение пока еще слабое, чтобы обосновать принятие гипотезы устойчивости Парето относительно какого-либо островершинного распределения. Кроме того, свойство бесконечности дисперсии негауссовых устойчивых распределений подразумевает, что большинство наших статистических методов, которые основаны на предположениях о конечности моментов (например, метод наименьших квадратов), бесполезны. Гипотеза устойчивости Парето также подразумевает, что даже первый момент или математическое ожидание арифметического изменения цен не существуют. Отсутствие теории делает разработку требований к рассматриваемой модели при гипотезе устойчивости, по Парето, довольно трудной. Значительные теоретические и эмпирические трудности, связанные с гипотезой устойчивости Парето, побуждают рассматривать другие процессы с конечными моментами, чьи распределения не являются гауссовыми. Кроме того, обширная математическая литература по распределениям этих процессов и свойствам конечности моментов делает реализацию проверки гипотез значительно проще для таких процессов, чем для устойчивых процессов Парето – Леви.

Особенность стохастических моделей динамики процентных ставок состоит в том, что кроме прочего должны порождать неотрицательные процессы. Модель Блэка – Карасинского [2] (логарифмически нормальная модель), когда процентная ставка порождается диффузионным процессом

$$dr(t) = k r(t) \ln[ E \sqrt{1 + V/E^2} / r(t) ] dt + r(t) \sqrt{2k \ln(1 + V/E^2)} dW(t),$$

генерирует неотрицательный процесс с несколько более островершинной плотностью, чем нормальная. Однако правый хвост логарифмически нормальной плотности недостаточно тяжелый для описания реальных рыночных ставок (она чаще используется для описания процессов цен акций). К настоящему времени наиболее известными моделями процессов процентных ставок являются модели, построенные на основе случайных процессов Бесселя. Приведем две из них:

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR [3]):

$$dr(t) = k (E - r(t)) dt + \sqrt{2kVr(t)/E} dW(t). \quad (1)$$

Модель Ана – Гао (модель AG [4]):

$$dr(t) = k (E + V/E - r(t)) r(t) dt + \sqrt{2kVr^3(t)/E} dW(t). \quad (2)$$

Здесь процесс  $r(t)$  моделирует динамику процентной ставки,  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс, а параметры уравнений (1) и (2) имеют следующий смысл:  $E$  – стационарное среднее,  $V$  – стационарная дисперсия процесса  $r(t)$ , а положительный параметр  $k$  определяет корреляционные свойства процесса  $r(t)$  в обоих случаях таким образом, что коэффициент корреляции  $\rho$  случайных величин  $r(t)$  и  $r(t + \tau)$  равен  $\rho = \exp(-k |\tau|)$  для процесса, определяемого уравнением (1) и  $\rho = \exp[-k(E + V/E) |\tau|]$  для процесса, определяемого уравнением (2).

Введем обозначения:

$g(x|q, c) \equiv \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}$  – плотность вероятностей гамма распределения с

параметром формы  $q$  и параметром масштаба  $c$ ,  $x \geq 0$ ; если  $X \sim g(x|q, c)$ , тогда  $E[X] = q/c$ ,  $\text{Var}[X] = q/c^2$ ;

$p(j|\lambda) \equiv \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$  – пуассоновское распределение вероятностей с пара-

метром  $\lambda > 0, j = 0, 1, 2, \dots$ ; если  $J \sim p(j|\lambda)$ , тогда  $E[J] = \text{Var}[J] = \lambda$ ;

$b(j|q, b) \equiv \frac{\Gamma(q+j)}{j! \Gamma(q)} b^j (1-b)^q$  – отрицательное биномиальное распреде-

ление вероятностей с параметрами  $q > 0, b \in (0,1), j = 0, 1, 2, \dots$ ; если  $J \sim b(j|q, b)$ , тогда  $E[J] = qb/(1-b)$ ,  $\text{Var}[J] = qb/(1-b)^2$ ;

$h(x|q, c) \equiv \frac{c^{q+1}}{\Gamma(q+1)x^{q+2}} e^{-c/x}$  – плотность вероятностей для  $x \geq 0$  с пара-

метрами  $q, c$  такими, что при  $X \sim h(x|q, c)$ ,  $E[X] = c/q$ ,  $\text{Var}[X] = c^2/q^2(q-1)$ .

Ниже для краткости случайные величины и их возможные значения обозначаются одинаковыми символами.

**Утверждение 1.** Маргинальные плотности вероятностей процессов (1) и (2) определяются соответственно функциями  $g(r|q, c)$  и  $h(r|q, c)$ , причем параметры этих плотностей вычисляются по формулам:  $c = E/V$ ,  $q = E^2/V$  для процесса (1);  $c = E(1 + E^2/V)$ ,  $q = 1 + E^2/V$  для процесса (2).

## ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

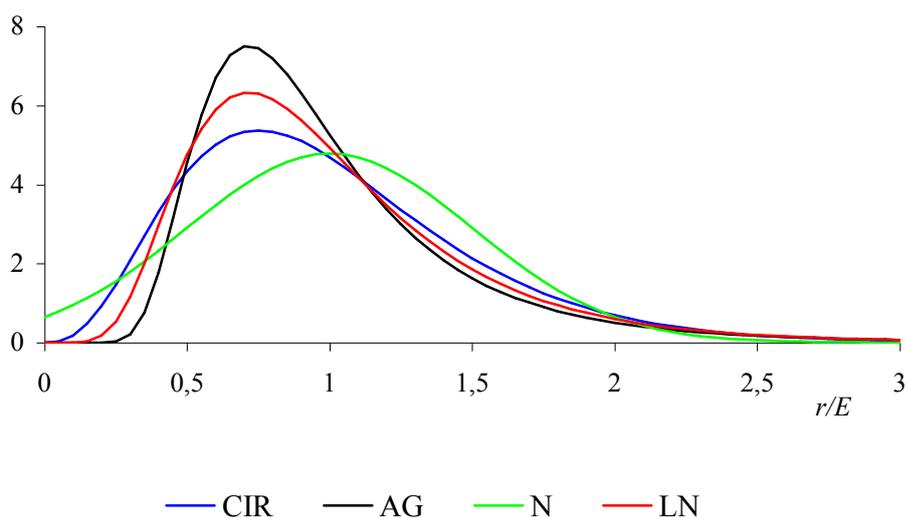


Рис.2.

На рис. 2 представлены стационарные плотности вероятностей для рассмотренных моделей: Васичека (N), Блэка – Карасинского (LN), Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) и Ана – Гао (AG) для  $E^2/V = 4$ . На рисунке 3 показаны правые хвосты этих плотностей.

## ПРАВЫЕ ХВОСТЫ ПЛОТНОСТЕЙ

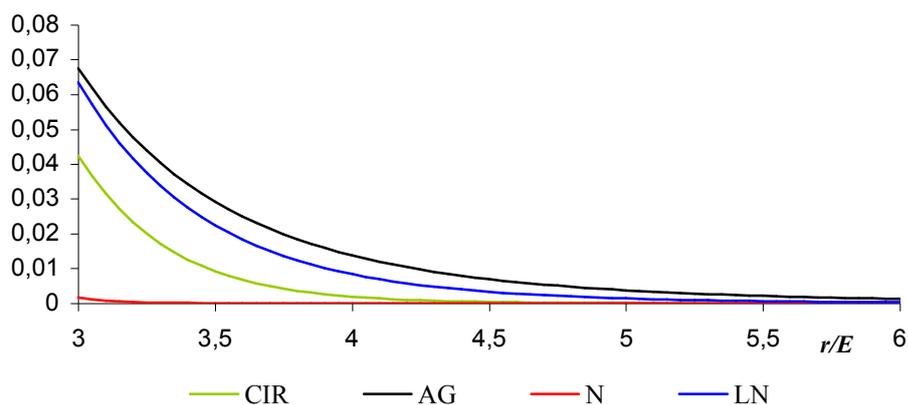


Рис.3.

Таким образом, модели (1) и (2) порождают процессы с неотрицательными значениями. Анализ показывает (см. ниже, а также рис. 3), что распределение процесса (2) обладает более тяжелым хвостом, чем распределение процесса (1). С практической точки зрения это более привлекательно, поскольку большинство стохастических моделей динамики финансовых показателей рынка обычно критикуется за то, что имеет правые хвосты распреде-

лений, спадающие быстрее, чем хвосты оценок плотностей по реальным финансовым показателям. На рисунке 4 показана сравнительная тяжесть правых хвостов для плотностей моделей Ана – Гао, Блэка – Карасинского и Кокса – Ингерсолла – Росса.

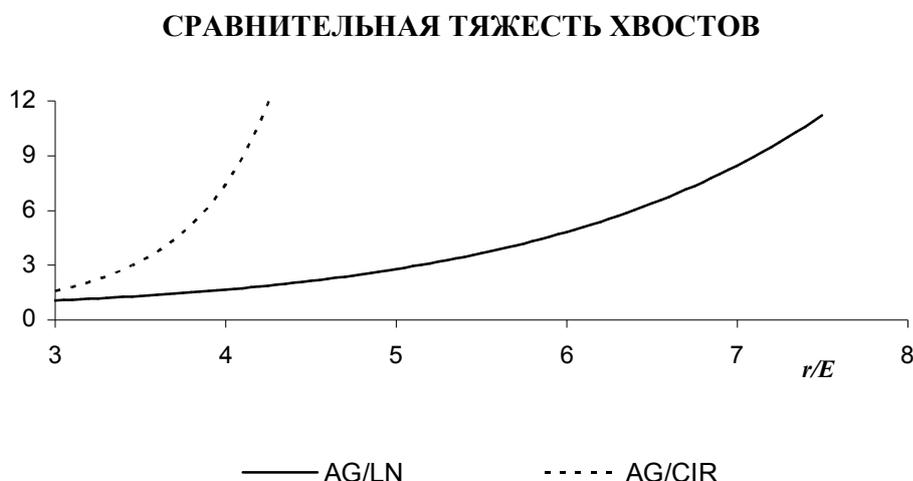


Рис. 4. Отношения плотностей вероятностей для моделей Ана – Гао (AG) и Блэка - Карасинского (LN), а также для моделей Ана – Гао (AG) и Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR)

Сравнительный анализ плотностей  $g(r)$  и  $h(r)$  можно провести с помощью отношения этих плотностей для одинаковых стационарных математического ожидания  $E$  и дисперсии  $V$ :

$$\frac{h(r)}{g(r)} = \left( \frac{V + E^2}{r^2} \right)^{1+E^2/V} \exp \left[ \frac{Er}{V} - \frac{E}{r} \left( 1 + \frac{E^2}{V} \right) \right].$$

Это отношение является функцией со следующими особенностями

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{g(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h(r)}{g(r)} = \infty,$$

имеется два экстремума: максимум в точке  $r_{\max} = E / [1 + 1/\sqrt{1 + E^2/V}] < E$  и минимум в точке  $r_{\min} = E / [1 - 1/\sqrt{1 + E^2/V}] > E$ . Это означает, что на интервалах  $(0, r_{\max})$  и  $(r_{\min}, \infty)$  функция возрастает, а на интервале  $(r_{\max}, r_{\min})$  – убывает. Так что у плотности  $g(r)$  тяжелее левый хвост, а правый хвост тяжелее у плотности  $h(r)$ . Кроме того, при  $r = E$  имеем  $h(E)/g(E) = (1 + V/E^2)^{1+E^2/V} / e$ .

Поэтому  $h(E)/g(E) \approx 1$  при  $E^2/V \gg 1$  (что обычно выполняется на практике). Так что функции  $g(r)$  и  $h(r)$  пересекаются в окрестности точки  $r = E$ . Для иллюстрации функция  $h(r)/g(r)$  представлена ниже на рисунке 4 для типичных рыночных значений среднего  $E$  годовой процентной ставки доходности и ее дисперсии  $V$  краткосрочных (один месяц) ценных бумаг Казначейства США.

$$h/g, E = 0,08, V = 0,0016$$

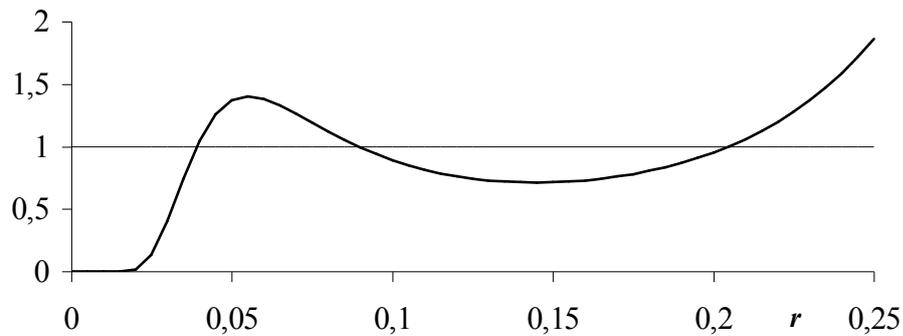


Рис.4. Отношение плотностей  $h(r)$  и  $g(r)$ .

**Следствие.** Начальные моменты стационарных распределений процессов (1) и (2) вычисляются по формулам

$$E[r^k] = \left(\frac{V}{E}\right)^k \frac{\Gamma(k + E^2/V)}{\Gamma(E^2/V)}$$

для процесса (1) и

$$E[r^k] = E^k \left(1 + \frac{E^2}{V}\right)^k \frac{\Gamma(2 - k + E^2/V)}{\Gamma(2 + E^2/V)}$$

для процесса (2).

Таким образом, для процесса (1) существуют моменты любого порядка. Однако для процесса (2) это не так: момент порядка  $k$  существует только для  $k < 2 + E^2/V$ . Этого можно было ожидать, поскольку плотность вероятностей процесса (2) имеет тяжелый правый хвост. Заметим, что математическое ожидание и дисперсия процесса (2) существуют гарантированно. На практи-

ке обычно отношение  $E^2/V$  достаточно велико (в приведенном выше примере  $E^2/V = 4$ ), так что, как правило, существуют как третьи, так и четвертые моменты распределения  $h(r)$ . Представляет интерес провести сравнительный анализ асимметрии и эксцесса процессов, моделирующих динамику процентной ставки. В нижеследующей таблице представлены выражения для асимметрии и эксцесса рассматриваемых распределений вероятностей. В таблице для краткости введены следующие обозначения:  $a = E^2/V$ ,  $\omega = 1 + 1/a$ .

Распределение	Асимметрия	Эксцесс
Нормальное	0	3
Гамма (CIR)	$2/\sqrt{a}$	$3/(1+2/a)$
AG	$4\sqrt{a}/(a-1)$	$3(a^2 + 7a)/(a^2 - 3a + 2)$
Логнормальное (LN)	$(3 + 1/a)/\sqrt{a}$	$\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3$

На рисунках 5 и 6 представлены графики зависимости этих числовых характеристик плотностей от параметра  $a$ . Из приведенных данных таблицы и графиков становится ясным, что плотность вероятностей для модели Ана – Гао при одинаковых двух первых моментах обладает наибольшей асимметрией (приводящей к тому, что эта плотность имеет наиболее тяжелый правый хвост) и наибольшей островершинностью (эксцессом). Таким образом, эта модель оказывается наиболее подходящей для моделирования процессов изменения финансовых рыночных показателей.

#### АСИММЕТРИЯ

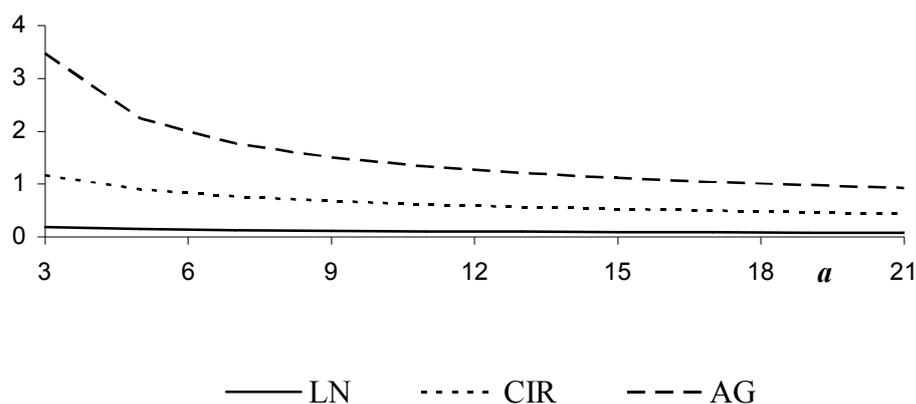


Рис. 5.

## ЭКСЦЕСС

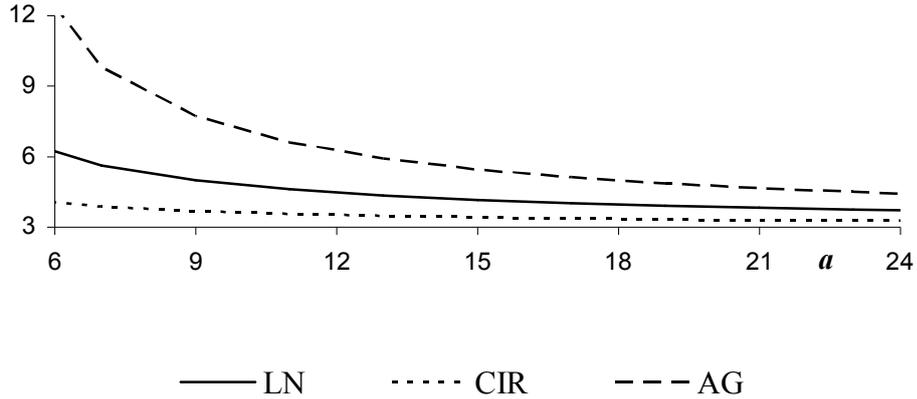


Рис. 6.

Интересно заметить, что с увеличением отношения  $a = E^2/V$  плотности вероятностей моделей Ана – Гао, Блэка – Карасинского и Кокса – Ингерсолла – Росса сходятся к нормальной плотности, то есть указанные модели с увеличением  $E^2/V$  приближаются к модели Васичека. Вместе с тем сама нормальная плотность вероятностей с увеличением отношения  $a = E^2/V$  сходится к дельта функции.

**Утверждение 2.** Условные плотности вероятностей  $f(r, t | R, s)$ , где обозначено  $r = r(t)$ ,  $R = r(s)$ ,  $s < t$ , определяются в виде смеси распределений

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j} r^{q+j-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-cr} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) g(r | q+j, c), \quad r \geq 0, \quad (3)$$

где  $u = \frac{\rho ER}{V(1-\rho)}$ ,  $c = \frac{E}{V(1-\rho)}$ ,  $q = \frac{E^2}{V}$ ,  $\rho = e^{-k(t-s)}$  для процесса (1) и

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j+1} r^{-q-j-2}}{\Gamma(q+j+1)} e^{-c/r} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) h(r | q+j, c), \quad r \geq 0, \quad (4)$$

где  $u = \frac{\rho E(1+E^2/V)}{R(1-\rho)}$ ,  $c = \frac{E(1+E^2/V)}{(1-\rho)}$ ,  $q = 1 + \frac{E^2}{V}$ ,  $\rho = e^{-k(E+V/E)(t-s)}$  для процесса (2).

Доказательство утверждений 1 и 2 основывается на результатах Феллера [5], который рассмотрел проблему решения уравнений Колмогорова для

плотности вероятностей диффузионного процесса (1), а также получил и исследовал характеристическую функцию этого процесса. В частности, он показал, что достаточным условием строгой положительности процесса (1) (другими словами, что нулевой уровень процесса  $r(t)$  недостижим сверху с вероятностью единица) является неравенство  $E^2/V > 1$ . Очевидно, что это тем более справедливо для процесса (2).

Вид плотностей (3) и (4) можно прокомментировать следующим образом. Получается, что случайная величина  $r(t)$  при фиксированном  $r(s) = R$  с пуассоновскими вероятностями  $p(j|u)$  имеет соответствующую плотность вероятностей с параметром  $q + j$ . Причем пуассоновский параметр  $u$  зависит от фиксированного значения  $r(s) = R$ . Иначе говоря, плотности  $f(r, t | R, s)$  – это смеси, в которых смешивающая случайная величина пуассоновская.

**Утверждение 3.** Совместные плотности вероятностей  $f(r, t; R, s)$ , для  $r = r(t)$ ,  $R = r(s)$ ,  $s < t$ , определяются в виде смеси распределений

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j | q, \rho) g(r | q + j, c) g(R | q + j, c) \quad (5)$$

для процесса (1) и

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j | q, \rho) h(r | q + j, c) h(R | q + j, c) \quad (6)$$

для процесса (2). Значения параметров  $q$ ,  $c$ ,  $\rho$  в формулах (5) и (6) определены так же, как в утверждении 2.

Таким образом, совместные плотности являются смешанными, как и условные плотности, только смешивающая случайная величина здесь имеет отрицательное биномиальное распределение. Кроме того, особенностью плотностей (5) и (6) является то, что при фиксированном значении смешивающей случайной величины  $J$ , выборочные значения процесса  $r(t)$  и  $r(s)$  в различные моменты времени оказываются независимыми, поскольку для всякого фиксированного значения  $J = j$  совместная плотность выражается в виде произведения плотностей. Так что в некотором смысле смешивающая случайная величина «регулирует» зависимость между выборочными значе-

ниями процесса. Такая структура плотностей вероятностей является удобной при аналитических расчетах, касающихся вычисления математических ожиданий от различных функций случайных процессов (1) и (2).

Поскольку процессы (1) и (2) являются Марковскими, с использованием утверждений 1 – 3 для обоих процессов (1) и (2) можно последовательно получить совместные плотности большей размерности так, как это сделано ранее для модели CIR [6].

#### Литература

1. Vasicek, O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure / O. Vasicek // *Journal of Financial Economics*. Vol. 5, 1977. P. 177 – 188.
2. Black, F. Bond and Options Pricing When Short Rates are Lognormal / F. Black, P. Karasinski // *Financial Analysts Journal*. 1991. Vol. 47. P. 52 – 59.
3. Cox J. C. A Theory of the Term Structure of Interest Rate / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // *Econometrica*. Vol. 53. 1985. P. 385–467.
4. Ahn D.-H. A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics / D.-H. Ahn, B. Gao // *The Review of Financial Studies*. Special 1999 Vol. 12, № 4. P. 721 – 762.
5. Feller W. Two singular diffusion problems / W. Feller // *Annals of Mathematics*. Vol. 54. № 1. 1951. P. 173–182.
6. Медведев Г. А. О вероятностных свойствах случайных процессов Кокса – Ингерсолла – Росса / Г. А. Медведев // *Вестник Томского государственного университета*. 2006. Приложение № 16. С. 125 – 129.