НЕРАВЕНСТВА ФИНАНСОВОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ ПРЕДОСТАВЛЕНИИ КРЕДИТОВ, ОСНОВАННЫЕ НА ОЖИДАЕМЫХ РИСКАХ.

Г. А. Медведев
Белорусский государственный университет

Исследована стохастическая математическая модель процесса кредитования. Предполагается, что в нестабильном экономичном состоянии рынка возможна неуплата кредита, которая может быть причиной риска при кредитовании. Величина фонда кредитования рассматривается как некоторая случайная величина, которая скачкообразно изменяется в моменты платежей кредитов или в моменты их выплаты. В то же самое время этот процесс можно рассматривать как сумму отдельных импульсных возмущений, появляющихся в случайные моменты времени и характеризующихся набором параметров, которые также могут быть случайными. Эти параметры определяются условиями кредитования. Среди них величина ссуды, срок ссуды, процентная ставка кредитования, тариф оплаты просроченного платежа, время задержки платежа, вероятность выплаты ссуды заемщиком. Предполагается, что кредитное учреждение устанавливает граничный допустимый уровень потерь для безопасных издержек и получения гарантируемой прибыли. В соответствии с предположением, что различные случайные переменные являются независимыми, найден ожидаемый риск кредитования на отдельную ссуду. На основе формулы ожидаемого риска получены неравенства, которые определяют значения вышеупомянутых параметров, гарантирующих увеличение ожидаемой величины фонда кредитования. Приводятся численные результаты.

Денежные Кредиты являются наиболее широко распространенными средствами для поддержки предпринимательской деятельности. В то же самое время кредитные учреждения могут быть подвергнуты финансовым воздействиям из-за риска неплатежа. Считается, что законные экономические взаимоотношения неустойчивы настолько, что неплатеж может произойти из-за банкротства заемщика, криминальных или других причин. Другие, более подробные сведения о рисковых займах описаны в [1]. Поэтому при выплате кредита желательно оценить риск кредитования, принимая во внимание вероятность возвращения ссуды.

Введем следующие обозначения:

t' – время выдачи кредита,
T – срок кредита (измеренный в годах),
S – величина выплаченной денежной ссуды,
t'' – время возмещения кредита,
Z – величина возмещенной денежной суммы,
J' – процентная ставка кредитования,
J'' – процентная ставка для просроченного возмещения,
p – вероятность того, что ссуда будет возмещена.

Как это делается в белорусских банках, мы предположим, что величина возмещенной денежной суммы $Z(t'')$, для краткосрочного кредита вычисляется по формуле, основанной на принципе простых процентов, то есть:

$$Z(t'') = S(1 + J'T)$$

в случае если $t'' - t' \leq T$. Но если ссуда возмещается после конца срока кредита ($t'' - t' > T$) это отношение конвертируется к виду

$$Z(t'') = S(1 + J'T)(1 + J''(t'' - t' - T)).$$

Удобно ввести величину $X = (t'' - t' - T)^+$, которая определяется равенствами $(x)^+ = 0$, если $x < 0$, и $(x)^+ = x$, если $x > 0$. X имеет значение времени задержки возмещения ссуды. Тогда обе формулы могут быть объединены в одну формулу

$$Z(t'') = S(1 + J'T)(1 + J''X).$$

Обратим внимание, что величины T и X измеряются в годах. Пусть Y будет случайной величиной возмещения ссуды: $Y = 1$, когда ссуда будет возмещаться, и $Y = 0$, когда ссуда не будет возмещаться. Предположим, что $E(Y) = p$. Тогда функция возмещенной ссуды может быть написана для любого времени t, $t \geq t'$,

$$Z(t) = 0 \qquad t' \leq t < t''$$
$$Z(t) = YS(1 + J'T)(1 + J''X) \qquad t'' \leq t$$

Величины t', J', S, T, X также имеют характер случайных величин. Будем считать их независимыми в совокупности случайными величинами. Мы будем называть функцию изменения денежных сумм, вызванного возмещением ссуды, функцией кредита $C(t)$. Эта функция определяется следующими выражениями

$$C(t) = 0, \qquad t \leq t'$$
$$C(t) = Z(t) - S, \qquad t > t'.$$

Все предыдущие обозначения соответствовали отдельному кредиту. Когда кредитное учреждение выдало некоторое число N ссуд, эти кредиты нумеруются в порядке времен выплаты. Тогда номер k каждого кредита должен быть применен ко всем параметрам, которые соответствуют этому кредиту. Наборы параметров для различных кредитов независимы кроме параметра t', когда для любого k: $t_k' < t_{k+1}'$. Таким образом, если начальное количество денег кредитования было R_0, то рабочий баланс наличных денег $R(t)$ в момент времени t выражается формулой:

$$R(t) = R_0 + \sum_{k=1}^{N(t)} C_k(t),$$

где $N(t)$ – число ссуд, выплаченных в течение временного интервала $(0, t)$.

Финансовая безопасность кредитного учреждения связана со свойствами рабочего баланса $R(t)$, который является случайным процессом. $R(t)$ изменяется скачкообразно в моменты времени возмещений или выплат ссуд. Неравенства финансовой безопасности определяют условия, которые гарантируют достаточную скорость увеличения ожидаемой величины денежной суммы $R(t)$. В настоящей статье мы исследуем проблему выполнения некоторых необходимых условий финансовой безопасности, которая основывается на рассмотрении только отдельного кредита.

Функция потерь для отдельного краткосрочного кредита может быть определена (аналогично [2]) как

$$L_k(t_k'') = S_k(1 + i\,(t_k'' - t_k')) - Y_k S_k(1 + J_k'\,T_k)(1 + J_k''\,X_k).$$

Здесь мы используем принцип простых процентов. Для коротких сроков накопление с простым процентом превышает накопление со сложным процентом, когда срок меньше, чем один год [3]. Символ i обозначает основную безрисковую процентную ставку.

На основе такой функции потерь можно формулировать различные неравенства безопасности. Пусть ε будет граничным допустимым уровнем потерь кредитования, α будет уровнем доверительной вероятности, при которой принимается решение. Тогда вероятностное неравенство безопасности для отдельного кредита имеет вид

$$\mathrm{Prob}(L_k \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Эта вероятность не зависит от индекса k, если значения параметров всех случайных кредитных функций имеют одинаковые распределения вероятности. Уровень ε может быть определен как $\varepsilon = a + bS_k$. Если $b = 0$ неравенство определяет условие безопасности на «один кредит», а если $a = 0$, неравенство определяет условие безопасности на «одну денежную единицу». Вероятностное неравенство безопасности для N кредитов имеет вид

$$\mathrm{Prob}\Big(\sum_{k=1}^{N} L_k \geq \varepsilon\Big) \leq \alpha$$

Это неравенство может быть предпочтительным, когда N является большим, и можно использовать нормальное приближение. Принцип конструирования неравенства безопасности на основе вероятности приводит к достаточно громоздким аналитическим выражениям. Более простые формулы получаются из принципа ожидаемой стоимости. Риск кредитования (для отдельного кредита) может быть определен как ожидаемая стоимость потерь $R = E[L_k]$, и неравенство безопасности, основанное на риске, имеет вид: $R < \varepsilon$. Если случайные величины, которые определяют кредитную функцию, независимы в совокупности, выражение риска можно представить в явной форме через ожидаемые значения параметров кредитной функции.

$$R = E[L] = E[S](1 + i\,E[(t'' - t')]) -$$
$$- pE[S](1 + i\,E[J']E[T] + E[J'']E[X] + E[J'J'']E[TX])$$

Получим это выражение при упрощающем предположении. Пусть J' и J'' будут функционально связанными равенством $J'' = dJ'$, $d > 1$. В общем случае $(t'' - t')$ и T также зависимые величины. Удобно вместо величины $(t'' - t')$ использовать относительную переменную $H = (t'' - t')/T$. Тогда $X = T\max\{0,\ H - 1\}$. И неравенство для допустимого риска становится следующим

$$E[S](1 + iE[HT]) - pE[S](1 + E[J']E[T] +$$
$$+ dE[J']E[T \max\{0, H-1\}] + dE[J'^2]\, E[T^2 \max\{0, H-1\}]) < \varepsilon.$$

В этом неравенстве переменные p, S, H, T являются характеристиками заемщиков, а переменные d, J' определяются кредитным учреждением. Поэтому возможно рассматривать это неравенство как соотношение для определения значений d и J' на основе статистических данных о случайных величинах H, S, T, Y. В этом случае не следует предполагать, что переменная J' является случайной. Пусть для определенности $J' = j$. Тогда в неравенстве для риска вместо $E[J']$ и Е $[J'^2]$ необходимо использовать j и j^2, соответственно.

Может случиться, что случайные переменные H и T являются взаимно независимыми. Если это так, неравенство для определения процентной ставки кредитования преобразовывается к более простому виду

$$1 + jhE[T] - p(1 + jE[T](1 + dh_0) + j^2 dh_0\, E[T^2]) < \varepsilon/\mathrm{E}[S].$$

Здесь для упрощения математического выражения использованы следующие обозначения: $h = E[H]$, $h_0 = E[\max\{0, H-1\}]$. Это неравенство может быть разрешено относительно процентной ставки кредитования j. Пусть

$$U = dh_0\, E[T^2]$$
$$V = (1 + dh_0)E[T]$$
$$W = -\,\varepsilon/pE[S] + (1 - p)/p + ih\, E[T]/p.$$

Тогда неравенство для j принимает вид

$$j > ((1 + 4UW/V^2)^{1/2} - 1)(V/2U).$$

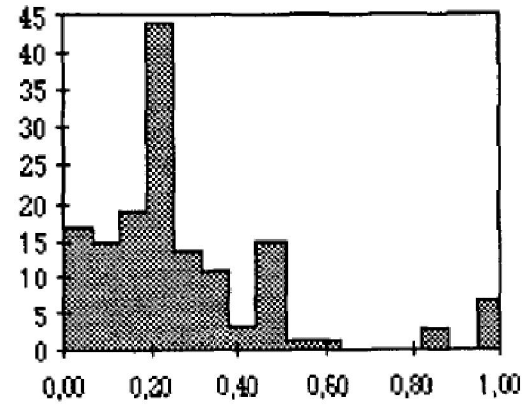
Заметим, что встречаются только $\varepsilon \le 0$, поэтому всегда $W > 0$. Когда $4UW/V^2 << 1$, то можно приблизительно написать, что $j > W/V$. Это устанавливает линейное соотношение процентных ставок i и j.

В качестве примера применения полученных неравенств мы рассмотрим данные одного из белорусских банков. Данные включают информацию об $N = 150$ ссудах. Платежи краткосрочных кредитов происходили через случайные интервалы. Распределение вероятности этих интервалов очень близко к показательному со средним значением $E[t_{k+1}' - t_k'] = 12$ (в днях). Гистограмма встретившихся сроков кредитования T представлена на рисунке 1. Гистограмма величин встретившихся ссуд S (в миллионах рублей) представлена на рисунке 2. Гистограмма встретившихся процентных ставок кредитования J' представлена на рисунке 3.

Процентная ставка для просроченного возмещения ссуды была установлена соотношением $J'' = 3J'$ $(d = 3)$.

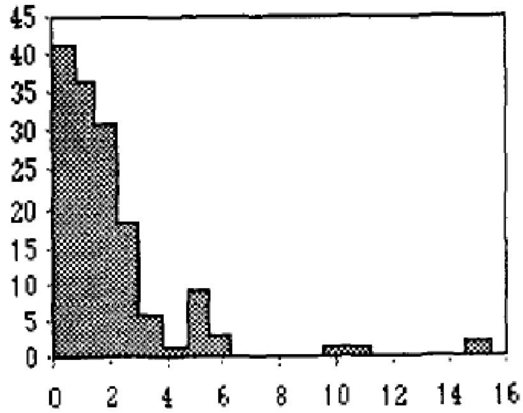
Эмпирические средние наблюдавшихся данных следующие:
$E[T] = 0{,}2788$ (в годах); $E[T^2] = 0{,}1238$; $E[S] = 1{,}9766$ (в миллионах рублей); $E[S^2] = 9{,}2391$; $E[J'] = 2{,}2142$ (в процентах); $E[J'^2] = 7{,}7056$.

Неравенства, полученные выше, определяют наименьшие значения величин параметров кредитования j и d, которые гарантируют допустимую величину риска при заданных вероятностных характеристиках случайных параметров кредита H, S, T, Y.



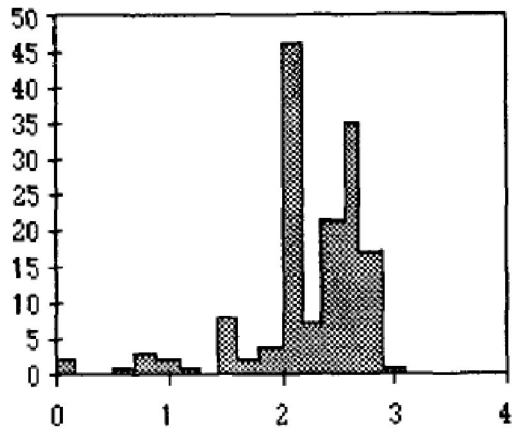
T (в годах)

Рис. 1. Гистограмма сроков кредитования для $N = 150$ кредитов



S (в миллионах рублей)

Рис. 2. Гистограмма стоимостей ссуд для $N = 150$ кредитов



J' (в процентах)

Рис. 3. Гистограмма процентных ставок кредитования для $N = 150$ кредитов

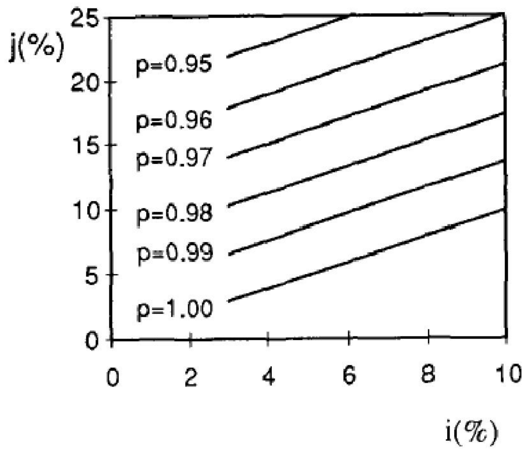


Рис. 4. Наименьшая процентная ставка кредитования j как функция основной процентной ставки i для различных вероятностей p.

Оценим наименьшее значение величины процентной ставки кредитования j для случая, когда переменные d, S, T имеют свойства, приведенные выше, и случайный параметр H с вероятностью 0,8 равен 1, и с вероятностью 0,2 равномерно распределен в интервале (0,9; 1,1). В этом случае

$$h = E[H] = 1,\ h_0 = E[\max\{0, H - 1\}] = 0{,}005.$$

Мы выберем коэффициент безопасности кредитования $\varepsilon = 0$. Поэтому

$$U = 0{,}0016,\ V = 0{,}2829,\ W = (1 - p + i\ 0{,}2788)/p.$$

Здесь вероятность $p \equiv E[Y]$ мы рассматриваем как параметр, который изменяется разумным способом, т.е. принимает значения больше, чем 0,95. Тогда при разумных значениях основной процентной ставки i (не более 0,1) $4UW/V^2 < 0{,}08$ и можно использовать приближенное неравенство для j

$$j > W/V = 3{,}5348(1 - p + i\ 0{,}2788)/p.$$

На рисунке 4 представлена наименьшая процентная ставка кредитования j для этого случая как функция основной процентной ставки i для нескольких значений вероятности возмещения ссуды p.

Литература

1. Ramsay C. M. An Introduction to Business Credit Insurance / Transactions of Society of Actuaries. Vol. XLV, 1993. 275 – 303.

2. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., and Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: Society of Actuaries, 1997. – 753 p.

3. McCutcheon, J. J. and Scott, W. F. Introduction to the Mathematics of Finance. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996. – 463 p.