

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ ОПЦИОНА, КОГДА ЛОГАРИФМ ЦЕНЫ БАЗИСНОГО АКТИВА ИМЕЕТ ГАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

А. П. Богомолов, Г. А. Медведев

*Академия управления при Президенте Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: andrey.bogomolov@gmail.com*

Рассмотрена задача определения нейтральной к риску плотности вероятностей процесса цены рискованного актива, когда в качестве модели цены актива принимается экспонента, показателем которой является случайный процесс с независимыми приращениями. Структура приращений процесса предусматривает две составляющих: систематический дрейф и случайная компонента, имеющая сдвинутое гамма распределение. Для определения нейтральной к риску плотности вероятностей используется подход преобразований Эшера. Полученные результаты используются для определения формулы для цены опциона колл европейского типа. Производится сравнение найденной нейтральной к риску плотности с плотностью, когда случайная компонента определялась как винеровский процесс, управляемый гамма процессом.

Ключевые слова: цена финансового актива, нейтральная к риску плотность вероятностей, опцион колл европейского типа, преобразование Эшера.

Как правило, при анализе непредвиденно изменяющихся цен на финансовом рынке в качестве математической модели изменения цен финансовых активов используются случайные диффузионные процессы. Такой подход позволяет во многих случаях получить в явном виде формулы для расчета необходимых показателей. Блэком и Шоулсом [1] была получена знаменитая формула определения цены финансового контракта, известного под названием «европейский опцион колл», в предположении, что рыночная цена S_t акций, лежащих в основе опционного контракта, изменяется со временем t как диффузионный процесс с логарифмически нормальным распределением. Уравнение такого процесса имеет вид

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Здесь μ – коэффициент дрейфа, σ – волатильность процесса доходности акции, а W_t – винеровский процесс, управляющий стохастическим изменением цены. Такая модель изменения цены подвергалась критике учеными и практиками. Из нее получается, что процентная ставка доходности акции dS/S на интервале dt нормально распределена с мгновенным средним μ и мгновенной дисперсией σ^2 . В то же самое время при помощи исследования рыночных данных показано, что предположение логарифмической нормальности не имеет места, поэтому определение цены европейского опциона колл впоследствии изучалось для других диффузионных моделей. В частности, в [2] использован так называемый класс диффузионных процессов с постоянной эластичностью дисперсии:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\alpha/2} dW_t \quad (\text{параметр эластичности } 0 \leq \alpha < 2), \quad (1)$$

где мгновенная дисперсия процентной ставки доходности акции равна $\sigma^2/S_t^{2-\alpha}$ и, следовательно, убывает с ростом цены акции. В традиционно используемой логарифмически нормальной модели, которая соответствует предельному случаю $\alpha = 2$, мгновенная дисперсия не является функцией цены акции. На основе эмпирических исследований оказалось [3], что класс диффузионных процессов с постоянной эластичностью дисперсии лучше описывает фактическое поведение цен акций, чем традиционно используемая логарифмически нормальная модель.

Поэтому формула для определения цены опциона, основанная на постоянной эластичности дисперсии диффузионного процесса, лучше приспособляется к ценам реального рынка, чем модель Блэка – Шоулса. В статье [4] использован явный вид распределения вероятностей процесса (1) для получения формулы определения цены опциона колл. Оказывается [5], что при постоянной безрисковой процентной ставке r и $0 \leq \alpha < 2$ для процесса (1) нейтральная к риску плотность вероятностей $f^*(S_T; S_t, T > t)$ цены акции S_T в момент T при фиксированном текущем значении S_t имеет вид

$$f^*(S_T; S_t, T > t) dS_T = e^{-u-v} \left(\frac{u}{v} \right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}) du, \quad u \in (0, +\infty), \quad (2)$$

где для краткости обозначено $u \equiv k S_T^{2-\alpha}$, $v \equiv k S_t^{2-\alpha} e^{r(2-\alpha)\tau}$, $k \equiv \frac{2r}{\sigma^2(2-\alpha)[e^{r(2-\alpha)\tau} - 1]}$,

$\tau \equiv T - t$, $q \equiv 1/(2 - \alpha)$, $I_q(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q .

Плотность вероятностей (2) часто интерпретируется как плотность нецентрального хи-квадрат распределения, которое по определению характеризует сумму $\sum_{k=1}^v (\xi_k + \delta_k)^2$, где ξ_k – независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, δ_k – ненулевые константы. Целое число v называется числом степеней свободы, величина $\lambda = \sum_{k=1}^v \delta_k^2$ – параметром нецентральности. В рассматриваемом случае параметр нецентральности λ интерпретируется как $2v$, а число степеней свободы v соответствует величине $2(q+1)$, которая является целым числом только в случае, когда $\alpha = 0$. Таким образом, плотность вероятностей (2), хотя и упоминается в литературе как плотность нецентрального хи-квадрат распределения, строго говоря, ею является только в одном частном случае. Более естественным названием плотности (2) (относительно переменных u и v) является: условная гамма плотность с параметром масштаба 1 и параметром формы $(q+1)$ [6].

Использование диффузионного процесса в качестве модели процесса цены финансового актива не всегда эффективно, поскольку плотность вероятностей процесса диффузии может быть определена в явной форме, необходимой для получения формулы определения стоимости финансового контракта, только в очень редких случаях. Поэтому мы рассмотрим другую модель стохастического изменения цены. Поскольку цена актива является неотрицательной величиной, ее можно представить в виде

$$S_t = S_0 \exp[X_t] \quad (3)$$

где X_t – случайный процесс с определенными свойствами, о которых будет сказано ниже. Такая модель достаточно простая и не требует анализа стохастических дифференциальных уравнений диффузии. Вообще говоря, процесс X_t существует для любого изменения цен, так как он связан с изменяющимися значениями цены явным соотношением $X_t = \ln[S_t/S_0]$. Основным требованием к процессу X_t является то, чтобы он обеспечивал мар-

тингальные свойства дисконтированному процессу цены $S_t e^{-rt}$, т.е. чтобы плотность вероятностей процесса X_t обеспечивала равенство $E^*[S_t e^{-rt} | S_0] = S_0$ для любых t , где через $E^*[\cdot]$ обозначено математическое ожидание с использованием нейтральной к риску плотности вероятностей. Оказывается, что этого можно достичь, если плотность вероятностей процесса X_t является безгранично делимой. Плотность вероятностей безгранично делима, если сумма любого количества n независимых случайных величин, имеющих эту плотность, распределена тоже согласно этой плотности.

Покажем, как можно использовать модель цены (3) для определения цены европейского опциона колл в случае, когда объективная (т.е. статистически определяемая по рыночным данным) плотность процесса X_t является условной гамма плотностью с параметром масштаба c и параметром формы $(q + 1)$:

$$f(X_t | X_{t-\tau}) = f(x | v, c, q + 1) = c e^{-c(x+v)} \left(\frac{x}{v} \right)^{q/2} I_q(2c\sqrt{xv}), \quad x \in (0, +\infty), \quad (4)$$

где $X_t = x$, $v = X_{t-\tau} \rho_\tau$, $c = c_0 / (1 - \rho_\tau)$, c_0 – параметр, задающий масштаб, и $\rho_\tau > 0$ – коэффициент корреляции между X_t и $X_{t-\tau}$.

Поскольку предположения модели Блэка–Шоулса в части распределения вероятностей цены не всегда оправдываются, для определения цены финансового контракта следует использовать более общую формулу. Если имеются основания считать, что в момент времени T завершения контракта цена акций S_T описывается некоторой условной плотностью вероятностей $f(S_T; S_t, T > t)$ для всякого $T > t$ и S_t – цены акций в момент времени t , тогда для определения цены P_t финансового контракта, основанного на этих акциях, в текущий момент времени t , справедлива формула:

$$P_t = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty f^*(S_T; S_t, T > t) V(S_T) dS_T \quad (5)$$

где $f^*(S_T; S_t, T > t)$ – нейтральная к риску условная плотность вероятностей цены акции S_T в дату исполнения T при условии, что в текущую дату $t < T$ цена акции была равна S_t ; $V(S_T)$ – функция платежа по завершении контракта и r – безрисковая процентная ставка. Формула (5) представляет собой математическое ожидание на момент времени t дисконтированного платежа $V(S_T)$ по плотности вероятности, нейтральной к риску, т.е. $P_t = E^*[V(S_T) e^{-r(T-t)} | S_t]$.

Таким образом, для получения формулы для стоимости европейского опциона колл, когда цена акции описывается моделью (3) через процесс X_t с плотностью (4), необходимо преобразовать эту объективную плотность в плотность, нейтральную к риску.

Лемма 1. Условная гамма плотность (4) является безгранично делимой.

Доказательство. Производящая функция моментов для плотности (4) с параметрами v, c и $q + 1$ имеет вид

$$M_1(h) = \int_0^\infty e^{hu} f(u | v, c, q + 1) du = \left(\frac{c}{c-h} \right)^{q+1} \exp\left(\frac{vch}{c-h} \right), \quad h < c. \quad (6)$$

С другой стороны, производящая функция моментов суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью (4) выражается как производящая функция моментов $M_1(h)$ в степени n , т.е.

$$M_n(h) = [M_1(h)]^n = \left(\frac{c}{c-h} \right)^{n(q+1)} \exp\left(\frac{nvch}{c-h} \right), \quad h < c. \quad (7)$$

т.е. та же, что и (6), но с другими параметрами: nv и $n(q + 1)$, увеличенными в n раз. Поскольку между плотностями вероятностей и производящими функциями моментов имеется вза-

имно однозначное соответствие, то плотность вероятностей суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью (4) с точностью до параметров выражается так же, как и (4), что и доказывает лемму.

Сделаем обычно используемые предположения относительно процесса X_t : процесс X_t является процессом со стационарными и независимыми приращениями. Отсюда следует, что $X_{n\tau}$ можно представить в виде $X_{n\tau} = \sum_{k=1}^n (X_{k\tau} - X_{(k-1)\tau}) \equiv \sum_{k=1}^n \xi_k$, где слагаемые ξ_k являются независимыми и одинаково распределенными.

Для определения плотности вероятностей приращений ξ_k сделаем следующие предположения. Будем считать, что на каждом временном интервале $((k-1)\tau, k\tau)$ процесс стартует со своего среднего значения θ и в конце интервала принимает случайное значение, имеющее плотность вероятностей (4). В этом случае математическое ожидание стационарных приращений ξ_k будет равно нулю и для того, чтобы отразить возможные систематические сдвиги процентной ставки, введем дополнительно систематическую составляющую μt к изменению процесса X_t . Тогда объективная плотность вероятностей приращений ξ_k имеет вид (для краткости здесь случайные величины и их возможные значения обозначаются одинаковыми символами)

$$f(\xi|q, c, v) = ce^{-c(\xi+v+\theta-\mu\tau)} \left(\frac{\xi+\theta-\mu\tau}{v} \right)^{q/2} I_q(2c\sqrt{(\xi+\theta-\mu\tau)v}), \quad \xi+\theta-\mu\tau \in (0, +\infty), \quad (8)$$

где $v = \theta\rho_\tau$, а остальные параметры такие же, как и у плотности вероятностей (4).

Отсюда и из Леммы 1 следует, что производящая функция моментов случайной величины $X_{n\tau}$ приобретает вид:

$$[M_\xi(h)]^n = \left(\int_0^\infty e^{h\xi} f(\xi) d\xi \right)^n = e^{-(\theta-\mu\tau)nh} \left(\frac{c}{c-h} \right)^{(q+1)n} \exp\left(\frac{nvch}{c-h} \right), \quad h < c.$$

Для получения нейтральной к риску плотности вероятностей процесса X_t воспользуемся методом преобразования Эшера [7] (как было выше упомянуто плотность (4) является объективной, т.е. определяемой по рыночным данным). Преобразованием Эшера плотности вероятностей $f(x)$ называется преобразование

$$f(x; h) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^\infty e^{hx} f(x) dx} \equiv \frac{e^{hx} f(x)}{M_1(h)}.$$

В свою очередь, производящая функция моментов $M(y; h)$ для плотности вероятностей $f(x; h)$ имеет вид:

$$M(y; h) = \int_0^\infty e^{yx} f(x; h) dx = \int_0^\infty \frac{e^{(y+h)x} f(x)}{M_1(h)} dx = \frac{M_1(y+h)}{M_1(h)}.$$

Таким образом, производящая функция моментов для преобразования Эшера плотности вероятностей процесса $X_{n\tau}$ принимает вид

$$M_n(y; h) = \left(\frac{M_\xi(y+h)}{M_\xi(h)} \right)^n = \left[e^{-(\theta-\mu\tau)y} \left(\frac{c-h}{c-h-y} \right)^{q+1} \exp\left(\frac{c^2vy}{(c-h)(c-h-y)} \right) \right]^n, \quad h+y < c.$$

Из модели (3) для цены акции и упомянутого выше мартингального соотношения $E^*[S_t e^{-rt} | S_0] = S_0$ следует, что $E^*[S_0 \exp(X_{n\tau}) | S_0] = S_0 e^{rn\tau}$ или $E^*[e^{X_{n\tau}}] = e^{rn\tau}$. Заметим,

что левая часть этого равенства совпадает с производящей функцией моментов процесса X_t , вычисленной в точке $y=1$, для плотности вероятностей, нейтральной к риску. В связи с этим получается, что нейтральной к риску плотностью вероятностей процесса X_t является преобразование Эшера объективной плотности вероятностей процесса X_t с соответствующим образом подобранным параметром h , обеспечивающим мартингалное свойство для процесса дисконтированной цены облигации [7]. Иначе говоря,

$$E^*[e^{X_{n\tau}}] = M_n(1; h^*) = \left(\frac{M_\xi(1+h^*)}{M_\xi(h^*)} \right)^n = e^{r n \tau}.$$

Лемма 2. Нейтральная к риску плотность вероятностей процесса X_t имеет вид

$$f(x; h^*) = \frac{e^{h^* x} f(x | v, c, q+1)}{\int_0^\infty e^{h^* x} f(x | v, c, q+1) dx} \equiv \frac{e^{h^* x} f(x | v, c, q+1)}{M_1(h^*)},$$

где величина параметра h^* определяется равенством $h^* = c - 1/(1 - \eta)$, где η – корень уравнения

$$c^2 v \frac{(1 - \eta)^2}{\eta} - (q+1) \ln \eta = (r - \mu)\tau + \theta, \quad \eta \in (0, 1). \quad (9)$$

Доказательство. Подставляя в левую часть равенства $E^*[e^{X_{n\tau}}] = e^{r n \tau}$ явное выражение для математического ожидания, т.е. значение производящей функции $M_n(1; h)$, получим равенство

$$\left[e^{-(\theta - \mu\tau)} \left(\frac{c - h}{c - h - 1} \right)^{q+1} \exp \left(\frac{c^2 v}{(c - h)(c - h - 1)} \right) \right]^n = e^{r n \tau}, \quad 1 < c - h,$$

которое следует рассматривать как уравнение относительно h^* . Логарифмируя это равенство и сокращая полученное выражение на n , получаем уравнение

$$(q+1) \ln \left(\frac{c - h}{c - h - 1} \right) + \frac{c^2 v}{(c - h)(c - h - 1)} - (\theta - \mu\tau) = r \tau, \quad c - h > 1.$$

Наконец, вводя для краткости вместо h переменную η соотношением $1 - \eta = 1/(c - h)$ получим уравнение (9). В области определения h : $c - h > 1$ переменная η изменяется в пределах $0 < \eta < 1$. При этом левая часть уравнения имеет отрицательную производную по η , т.е. монотонно убывает от ∞ до 0. В области, где $(r - \mu)\tau + \theta > 0$, правая часть уравнения (9) принимает положительное значение, и решение уравнения (9) существует и является единственным.

Таким образом, нейтральная к риску условная плотность вероятностей приращения ξ_k будет иметь вид

$$f^*(\xi | q, c^*, v^*) = c^* e^{-c^*(\xi + \theta - \mu\tau) - v^* \left(\frac{c^*(\xi + \theta - \mu\tau)}{v^*} \right)^{q/2}} I_q(2\sqrt{c^*(\xi + \theta - \mu\tau)v^*}), \quad (10)$$

где $v^* = c^2 \theta \rho_\tau / c^*$, $c^* = c - h^*$, $c = c_0 / (1 - \rho_\tau)$ и значение h^* определяется леммой 2.

Нейтральная к риску условная плотность вероятностей $f^*(S_T; S_0, T)$ цены акции S_T в дату исполнения $T = n\tau$ при условии, что в начальную дату $t = 0$ цена акции была равна S_0 , для модели (3) выражается через n -кратную свертку плотностей (10). Как было выше показано, ввиду независимости приращений ξ_k и неограниченной делимости плотности (4) (а, следовательно,

но, и (10)) плотность $f^*(S_T; S_0, T)$ будет иметь такой же вид, что и (10) за тем исключением, что параметры q , ν^* и $(\theta - \mu\tau)$ должны быть увеличены в n раз:

$$f^*(S_T; S_0, T) dS_T = c^* e^{-c^*x - nc^*(\theta - \mu\tau) - n\nu^*} \left(\frac{c^*[x + n(\theta - \mu\tau)]}{n\nu^*} \right)^{nq/2} \times \\ \times I_{nq}(2\sqrt{c^*[x + n(\theta - \mu\tau)]n\nu^*}) dx, \quad (11)$$

где $x = \ln[S_T/S_0]$, $T = n\tau$. Эту плотность и следует использовать для определения стоимости контрактов по формуле (5).

Представляет интерес сравнение объективной (8) и нейтральной к риску (10) плотностей вероятностей случайного приращения ξ . В нижеследующей таблице приведены первые четыре момента обеих плотностей

Таблица

Моменты объективной и нейтральной к риску плотностей вероятностей.

Моменты	Объективная плотность [6]	Нейтральная к риску плотность
Математическое ожидание	$\mu\tau$	$\frac{1+q}{c-h^*} \left(1 + \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*} - \frac{c-h^*}{c_0} \right) + \mu\tau$
Дисперсия	$\frac{1+q}{c_0^2} (1-\rho^2)$	$\frac{1+q}{(c-h^*)^2} \left(1 + 2 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*} \right)$
Асимметрия	$\frac{2}{\sqrt{1+q}} \frac{1+2\rho}{(1-\rho)(1-\rho^2)^{3/2}}$	$\frac{2}{\sqrt{1+q}} \frac{1+3 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*}}{\left(1 + 2 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*} \right)^{3/2}}$
Эксцесс	$3 + \frac{6}{1+q} \frac{1+3\rho}{(1-\rho)(1-\rho^2)^2}$	$3 + \frac{6}{1+q} \frac{1+4 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*}}{\left(1 + 2 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c}{c-h^*} \right)^2}$

Интересно отметить, что асимметрия и эксцесс объективной плотности вероятностей не зависят от параметра масштаба c , а зависят только от параметра формы q и корреляционных свойств процесса X_t . Как оказалось, нейтральная к риску плотность вероятностей этим свойством не обладает. Заметим также, что при $h^* \rightarrow 0$ моменты нейтральной к риску плотности сходятся к соответствующим моментам объективной плотности.

Для того чтобы сравнить рассматриваемые плотности визуально, выберем параметры некоторой реальной рыночной ситуации. В соответствии с моделью (3) процесс X_t имеет смысл годовой доходности финансового актива. В [8] приведены оценки параметров, полученные на основе анализа 360 наблюдений годовой доходности одномесячных билетов казначейства США за период июнь 1964 – декабрь 1989. Согласно этим оценкам среднее значение процесса X_t равно 0,0808, а его дисперсия равна 0,001261. На основе

этих оценок можно принять следующие значения параметров объективной плотности вероятностей (8): $c = 71, 2024$, $q + 1 = 5,1778$, $\rho = 0,1$. При этих значениях параметров корень уравнения (9) на уровне $(r - \mu)\tau + \theta = 0,95$ равен $\eta = 0,3734$. Это дает значение параметра $h^* = 51,2024$. Для этих значений параметров вид объективной и нейтральной к риску плотностей представлен на рисунке 1.

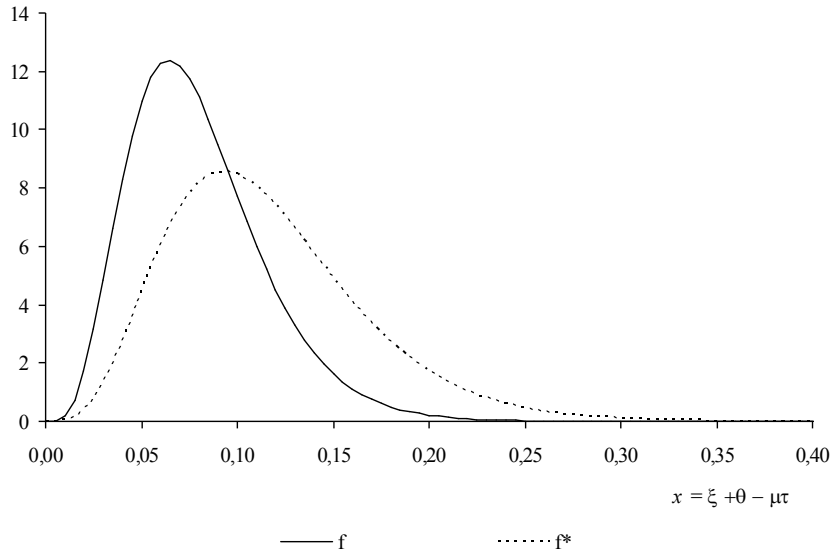


Рис.1. Вид объективной (f) и нейтральной к риску (f^*) плотностей вероятностей.
По горизонтальной оси отложены значения переменной $x = \xi + \theta - \mu\tau$.

Полученные результаты приводят к выводу, что справедливо следующее

Утверждение.

Пусть на произвольном временном промежутке $[0, T]$, где $T = n\tau > 0$, выполняются все предположения Блэка–Шоулса, кроме предположения о стохастической динамике цены базисного актива.

1. Изменение цены базисного актива S_t определяется моделью: $S_t = S_0 \exp[X_t]$, где случайный процесс $X_{\tau n} = \sum_{k=1}^n \xi_k$ имеет одинаково распределенные, независимые в совокупности и стационарные приращения ξ_k на интервалах времени длительностью τ .

2. Плотность вероятностей приращений ξ определяется выражением (8).

3. Функция платежа в момент исполнения контракта T

$$V(S_T) = \max(S_T - K, 0) = \begin{cases} S_T - K, & \text{если } S_T > K, \\ 0, & \text{если } S_T \leq K, \end{cases}$$

соответствует платежу при погашении европейского опциона колл, K – цена исполнения.

Тогда для цены C_0 европейского опциона колл в момент времени 0 справедлива формула

$$C_0 = S_0[1 - F(g|T, h^* + 1)] - Ke^{-rT}[1 - F(g|T, h^*)],$$

где $g \equiv \ln[K/S_0]$, $F(g|T, h^*)$ – функция распределения, соответствующая нейтральной к риску плотности вероятностей (11).

Доказательство. Согласно формулам (5) и (11)

$$C_t = e^{-rT} \int_K^\infty f^*(S_T; S_t, T)(S_T - K) dS_T =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-rT} \int_g^{\infty} c^* e^{-c^*x - nv^* - n(\theta - \mu\tau)} \left(\frac{c^*[x + n(\theta - \mu\tau)]}{nv^*} \right)^{nq/2} \times \\
&\quad \times I_{nq}(2\sqrt{c^*[x + n(\theta - \mu\tau)]nv^*})(e^x S_0 - K) dx = \\
&= S_0 e^{-rT} \int_g^{\infty} e^x f(x; h^*) dx - K e^{-rT} [1 - F(g|T, h^*)].
\end{aligned}$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
e^x f(x; h^*) &= \frac{f(x) e^{x(h^*+1)}}{M_1(h^*)} = \frac{M_1(h^*+1)}{M_1(h^*)} f(x; h^*+1) = \\
&= M_T(1, h^*+1) f(x; h^*+1) = e^{rT} f(x; h^*+1).
\end{aligned}$$

Заменяя подынтегральное выражение $e^x f(x; h^*)$ на $e^{-rT} f(x; h^*+1)$, получаем утверждение теоремы.

Следует заметить, что если процесс X_t является нормальным процессом с независимыми приращениями, то формула для цены европейского опциона колл, получающаяся с помощью представления (3), полностью совпадает с формулой Блэка–Шоулса [7].

Представление (3) использовалось также в похожей с настоящей работой постановке в статье [9]. В этой статье процесс $X_t = \ln[S_t/S_0]$ определялся как винеровский процесс с линейным дрейфом, вычисляемый в моменты времени, определяемые случайным гамма процессом. В [9] утверждается, что такой процесс может быть представлен как разность двух возрастающих гамма процессов со специально определяемыми параметрами, которые зависят от параметров линейного дрейфа θ , волатильности винеровского процесса σ , а также дисперсии v исходного гамма процесса. Объективная плотность такого процесса (соответствующая нашей плотности (8)) имеет вид

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{2}{v^{t/v} \sigma \Gamma(t/v) \sqrt{2\pi}} e^{\frac{\theta x}{\sigma^2}} \left(\frac{x^2}{\theta^2 + 2\sigma^2/v} \right)^{\frac{t}{2v} - \frac{1}{4}} \times \\
&\quad \times K_{\frac{1}{v} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{x^2 \left(\theta^2 + 2\frac{\sigma^2}{v} \right)} \right),
\end{aligned}$$

где $K_q(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Здесь переменная x связана со значениями ξ процесса X_t соотношением $x = \xi - \mu t - (t/v) \ln(1 - \theta v - v\sigma^2/2)$. Нейтральная к риску плотность вероятностей в [9] определяется по такой же формуле, но вместо значений параметров μ , v , θ , σ объективной плотности используются другие специальным образом рассчитанные значения μ^* , v^* , θ^* , σ^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Other Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 644.
2. Schroder M. Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula // Journal of Finance. 1989. Vol. 44. № 1. P. 212.
3. Beckers S. The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications For Option Pricing // Journal of Finance. 1980. Vol. 35. № 3. P. 665.

4. Богомолов А. П. Ограничения моделей реальных опционов для управления риском инвестиций в информационные технологии // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С.
5. Cox J. Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions // Working Paper. Stanford University. 1975.
6. Медведев Г. А. Математические основы финансовой математики. Часть 2. Мн.: БГУ. 2003. С. 173.
7. Gerber H. U., Shiu E. S. Option Pricing by Esscher Transforms // Transaction of Society of Actuaries. 1994. Vol. XLVI. P. 108.
8. Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. S. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate // J. of Finance. Vol. 47. 1992. P. 1218.
9. Madan D., Carr P., Chang E. The Variance Gamma Process and Option Pricing // European Finance Review. 1998. Vol. 2. P. 79–105.