УДК 336.76

Г. А. Медведев

Некоторые проблемы финансовой экономики

В условиях глобальных экономических трудностей деятельность инвесторов на финансовых рынках должна быть экономически обоснованной, чтобы не провоцировать процессы, приводящие к кризисным явлениям. Для этого они должны принимать решения, основанные не на интуиции, а на строгом расчете. В статье на примерах показано, что задачи современной финансовой экономики требуют использования математических методов при описании процессов изменения рыночных показателей и формирования оптимальной деятельности инвесторов на рынке. Причем проблемы, к которым приводят эти методы, могут быть достаточно сложными и для их решения требуется применение информационных и компьютерных технологий.

Переживаемый в настоящее время экономический кризис в большой степени спровоцирован ошибочными действиями инвесторов на финансовых рынках. Необоснованные действия создателей финансовых пирамид, необеспеченная кредитная политика (особенно в ипотечной отрасли), неконтролируемые рыночные спекуляции, зачастую с криминальным оттенком, привели к тому, что глобальные денежные сбережения населения оказались ниже того уровня, который в настоящее время определяется глобальным потреблением. Это стало причиной того, что экономический кризис принял глобальный характер. Представляется, что во многом кризис объясняется тем, что в погоне за быстрой наживой на финансовый рынок вторглась масса недостаточно грамотных инвесторов и биржевых игроков, которые, игнорируя экономические закономерности, спровоцировали процессы, сделавшие кризис неизбежным. В свете этого представляется, что в настоящее время пропаганда научных идей финансового анализа является очень актуальной. В настоящей статье преследуется такая цель лишь в отношении некоторых направлений финансовой экономики и дается описание типичных проблем, возникающих в этой области.

Финансовая экономика – это совокупность эконометрических методов, позволяющих решать экономические задачи, возникающие на финансовом рынке. Одной из популярных проблем, решаемых финансовой экономикой, является проблема инвестиций, которую можно кратко сформулировать так:

куда и как лучше всего вложить свободные деньги.

Когда рынок прозрачен и стабилен, точнее детерминирован, тогда в силу уже сложившихся правил и законов финансового рынка определено, что участник рынка, вложивший в момент времени $t = 0$ сумму $S(0)$ в некоторый финансовый проект (контракт) продолжительностью T, получит после выполнении этого проекта, т. е. в момент времени T, сумму

$$S(T) = [1 + R(T)]S(0) > S(0);\ R(T) > 0.$$

Здесь $R(T)$ обозначает процентный доход, который инвестор получит после успешного завершения проекта. Не вдаваясь в подробности, заметим, что это соотношение можно записать в более удобной для анализа форме

$$S(T) = e^{\int_0^T r(t)dt} S(0), \quad \int_0^T r(t)dt = \ln[1 + R(T)].$$

Разница в том, что вместо совокупного процентного дохода $R(T)$ за весь период длительностью T в этом соотношении используется величина $r(t)$, характеризующая интенсивность получения дохода с течением времени. Величину $r(t)$ принято называть процентной ставкой доходности.

Сумму $S(0)$ можно назвать ценой контракта, гарантирующего получение суммы $S(T)$ через время T, и определить ее как

$$S(0) = \left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\} S(T)\right].$$

Таким образом, когда процентная ставка доходности $r(t)$ известна, а на рынке не происходит непредвиденных событий (рынок детерминирован), проблема вычисления цены проста.

Предположим теперь, что рыночная ситуация является неопределенной, а процентные ставки стохастичны. Тогда определение стоимости финансовых контрактов становится непростой задачей.

Возникает аналогия: можно полагать, что ожидаемая (или средняя) цена такого контракта может быть вычислена по формуле

$$E_0\left[\exp\left\{-\int_0^T r(t)dt\right\} S(T)\right], \tag{1}$$

где E_0 оператор усреднения на основе информации, имеющейся на начальный момент времени 0.

Однако это не всегда так. Оказывается, что можно лишь сказать, что на справедливом финансовом рынке (рынке без арбитражных возможностей) действительно существует вероятностная мера, относительно которой эта формула верна, но эта мера не определяет рыночные процессы так, как мы их наблюдаем на реальном финансовом рынке [1].

Так как же определить цену контракта на реальном финансовом рынке?

Рассмотрим эту проблему на примере определения цены облигации.

Рассмотрим рынок, где инвесторы покупают и выпускают для продажи свободные от неуплаты (дефолта) ценные бумаги на фиксированную сумму денег, которая должна быть доставлена в заданную дату погашения T в будущем, причем до этой даты никаких выплат (по купонам) не делается. Такие ценные бумаги принято называть бескупонными облигациями. Пусть $P(t,T)$ обозначает цену, наблюдаемую в момент времени t, $t \le T$, бескупонной облигации, погашаемой в момент времени T, с единичной стоимостью погашения $P(T, T) = 1$.

Доходность до погашения $y(t, T)$ является внутренней нормой отдачи в момент t на облигацию с датой погашения T и определяется по формуле:

$$y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T), \qquad t < T .$$

Ставки доходности $y(t, t+\tau)$, $\tau = T - t > 0$, рассматриваемые как функции τ, называются временной структурой доходности в момент времени t.

Теперь определим краткосрочную процентную ставку $r(t)$ как мгновенную ставку доходности:

$$r(t) = y(t,t) = \lim_{\tau\to 0} y(t, t+\tau).$$

Такая ставка из-за краткости периода начисления ($\tau \to 0$) будет безрисковой и обычно принимается в качестве процентной ставки прироста суммы банковского депозитного счета V. При краткосрочной ставке $r(t)$ стоимость этого счета будет увеличиваться согласно соотношению

$$dV = V\, r(t)\, dt.$$

Это равенство выполняется с достоверностью, поскольку в любой момент времени t текущее значение $r(t)$ краткосрочной ставки является мгновенной ставкой увеличения стоимости банковского депозитного счета.

Однако значения краткосрочной ставки в последовательные интервалы времени необязательно оказываются вполне определенными. На реальном финансовом рынке ставка $r(t)$ – это стохастический процесс, подчиняющийся двум требованиям: во-первых, $r(t)$ является непрерывной функцией времени, т. е. она не изменяется по величине скачкообразно; во-вторых, предполагается, что она следует марковскому процессу.

Таким образом, обычно делается следующее предположение.

1) *Краткосрочная ставка следует непрерывному марковскому процессу.*

Марковское свойство подразумевает то, что будущее развитие процесса краткосрочной ставки характеризуется скалярной переменной состояния, которой является ее текущая величина. Таким образом, распределение вероятностей будущих значений ставки $\{r(s), s \ge t\}$ полностью определяется значением $r(t)$.

Непрерывные марковские процессы обычно называются диффузионными и описываются стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$dr = \mu_r(r, t)\, dt + \sigma_r(r, t)\, dW(t), \tag{2}$$

где $dW(t)$ является приращением стандартного винеровского процесса, имеющим нулевое среднее и дисперсию dt. Функции $\mu_r(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$ являются соответственно мгновенными *дрейфом* (определяет величину систематических изменений ставки) и *волатильностью* (определяет величину непредвиденных изменений ставки) процесса $r(t)$.

Естественно ожидать, что цена бескупонной облигации будет определяться исключительно краткосрочной процентной ставкой в течение ее срока действия или, более точно, текущей оценкой будущей траектории краткосрочной ставки в течение срока действия облигации. Никакого конкретного вида этой траектории не предполагается.

Второе предположение можно сформулировать следующим образом.

2) *Цена $P(t,T)$ бескупонной облигации в момент t определяется через оценку будущих значений $\{r(s),\ t \le s \le T\}$ процесса краткосрочной ставки в течение срока действия облигации.*

Наконец, будем предполагать, что справедливо следующее.

3) *Рынок является эффективным, т. е. нет никаких расходов на сделки, информация доступна всем инвесторам одновременно и каждый инвестор действует рационально (предпочитает большее богатство меньшему и использует всю доступную информацию).*

Предположение 3) свидетельствует о том, что инвесторы имеют однородные ожидания и что невозможен какой-либо прибыльный безрисковый арбитраж. По предположению 1) развитие процесса краткосрочной ставки на интервале (t, T), $t \le T$, при фиксированном априорном его значении в момент времени

t зависит только от текущего значения процентной ставки $r(t)$. Тогда по предположению 2) цена $P(t, T)$ является также и функцией $r(t)$:

$$P(t,T) = P(t,T,r(t)). \tag{3}$$

Таким образом, значение краткосрочной процентной ставки является единственной переменной состояния для всей временной структуры. Ожидания, образованные знанием всего прошлого развития ставок всех сроков погашения, включая настоящую временную структуру, эквивалентны условным ожиданиям при фиксированном настоящем значении краткосрочной ставки.

Из формул (2) и (3) по правилу дифференцирования Ито следует, что цена облигации удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению [2]:

$$dP = P\mu_P\,(t, T)\,dt - P\sigma_P\,(t, T)\,dW(t),$$

где параметры $\mu_P(t, T) = \mu_P(t, T, r(t))$, $\sigma_P(t, T) = \sigma_P(t, T, r(t))$ задаются формулами

$$\mu_P(t,T,r) = \frac{1}{P(t,T,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,T,r),$$

$$\sigma_P(t,T,r) = -\frac{1}{P(t,T,r)}\sigma_r\frac{\partial}{\partial r}P(t,T,r).$$

Функции $\mu_P(t, T, r)$, $\sigma_P(t, T, r)$ соответственно являются дрейфом и волатильностью мгновенной ставки доходности в момент времени t на облигацию с датой погашения T при условии, что текущая краткосрочная процентная ставка равна $r(t) = r$. Как и прежде $\mu_P(t, T, r)$ и $\sigma_P(t, T, r)$ определяют систематическую и стохастическую компоненты изменения цены облигации со временем.

Поскольку арбитражные возможности исключаются предположением 3), отношение превышения ожидаемой доходности μ_P над краткосрочной ставкой r к волатильности σ_P должно не зависеть от срока погашения T, т. е.

$$\frac{\mu_P(t,T,r) - r}{\sigma_P(t,T,r)} = \lambda(t,r), \qquad t \le T. \tag{4}$$

Величина $\lambda(t, r)$ не зависит от даты погашения облигации и одинакова для облигаций всех сроков погашения T, поэтому она характеризует весь рынок облигаций. Ее принято называть рыночной ценой риска, так как она определяет увеличение ожидаемой мгновенной ставки доходности облигации на единицу риска, измеряемого неопределенностью доходов.

Используя равенство (4), получим следующее уравнение для цены бескупонной облигации [3]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r + \sigma_r\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t \le T. \tag{5}$$

Уравнение (5) является основным уравнением для определения цен облигаций на рынке, который характеризуется предположениями 1), 2), 3). Оно имеет много названий, одно из которых – «*уравнение временной структуры доходности*» облигации.

Уравнение временной структуры является дифференциальным уравнением с частными производными для $P(t, T, r)$ и характеризует класс задач, которые в математике называются краевыми. Как только характер процесса краткосрочной ставки $r(t)$ описан и рыночная цена риска $\lambda(t,r)$ задана, цены облигации получаются решением уравнения (5) при граничном условии $P(T, T, r) = 1$.

Решение дифференциальных уравнений с частными производными параболического и эллиптического типа, таких как уравнение (5), может быть представлено в интегральной форме через лежащий в основе стохастический процесс, как говорят в форме стохастического представления Фейнмана – Каца:

$$P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\tau, r(\tau))d\tau + \int_t^T \lambda(\tau, r(\tau))dW(t)\right), \quad t \le T.$$

Отсюда видно, что только при $\lambda = 0$ цена облигации определяется выражением, совпадающим с формулой (1):

$$P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right).$$

Это будет тогда, когда ожидаемые мгновенные ставки доходности на облигации для всех сроков погашения являются одинаковыми, $\mu_P\,(t, T) = r(t)$, $t \le T$. При этом говорят, что математическое ожидание вычисляется по нейтральной к риску вероятностной мере. То есть простая формула (1) верна только тогда, когда рыночные отношения исключают наличие риска.

До сих пор мы говорили только об одной ценной бумаге – облигации, но участники финансового рынка (инвесторы) обычно производят торговые сделки не с какой-то отдельной ценной бумагой, а с портфелем ценных бумаг. Это означает, что диверсификация инвестиций приветствуется, так как она снижает уровень совокупных финансовых рисков. Проблема определения цены портфеля и его эффективной модификации – более сложная задача финансовой экономики.

Задачу выбора оптимального портфеля и стратегии потребления можно представить следующим образом. Инвесторы на финансовом рынке согласно своим предпочтениям, определяемым функцией полезности U, в течение периода времени $[0, T]$ стараются оптимальным образом увеличивать свое богатство B, одновременно потребляя его часть согласно установленной норме потребления C, путем приобретения портфеля ценных бумаг из одной безрисковой (облигации) и нескольких типов рисковых (акций) согласно долям, составляющим в некоторый момент времени t вектор $\omega(t)$. Это приводит к задаче:

$$\max E_0\left\{\int_0^T \exp(-\rho t)U[C(t)]dt + u[B(T), T]\right\}; \tag{6}$$

при ограничениях бюджета (в простейшем случае при одной рисковой ценной бумаги – акции)

$$dB = \{[\omega(t)(\alpha - r) + r]B(t) - C(t_0)\}dt + \omega(t)\sigma\, B(t)\, dW(t)$$

$$C(t) \geq 0,\ B(t) > 0,\ B(0) = B_0 > 0.$$

Функция полезности $U(C)$ характеризует полезность богатства инвестора (выяснено, что полезность богатства не всегда совпадает с денежной стоимостью этого богатства). Эта функция строго вогнутая (т. е. $U'(C) > 0$, $U''(C) < 0$, штрих обозначает производную); $W(t)$ – винеровский процесс; T – дата окончания периода инвестирования; α и r – процентные ставки доходности рисковой и безрисковой бумаг, соответственно; $u[B(T), T]$ имеет смысл функции полезности богатства в дату окончания периода инвестирования (так называемая терминальная полезность богатства) и обычно предполагается вогнутой по $B(T)$. В формуле (6) E_0 обозначает оператор условного математического ожидания при известном фиксированном начальном богатстве $B(0) = B_0$.

Уравнение (6) фактически устанавливает критерий оптимальности действий инвестора. Чтобы получить уравнения для определения оптимальных стратегий, соответствующих этому критерию, представим задачу (6) в форме динамического программирования так, чтобы можно было применить принцип оптимальности Беллмана.

Для этого определим вспомогательную функцию полезности, которая будет согласована с критерием (6)

$$I[B(t), t] \equiv \max_{\{C(s),\omega(s)\}} E_t\left\{\int_t^T \exp(-\rho s)U[C(s)]ds + u[B(T), T]\right\}, \tag{7}$$

и подчиним (7) тем же самым ограничениям, что и (6). Из определения (7) следует, что

$$I[W(T), T] = u[B(T), T].$$

Тогда уравнение оптимальности Беллмана – Дрейфуса получается в виде

$$0 = \max_{\{C(t),\omega(t)\}}\left\{e^{(-\rho t)}U[C(t)] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial B}\{[\omega(t)(\alpha - r) + r]B(t) - C(t)\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial B^2}\sigma^2\omega^2(t)B^2(t)\right\},$$

где I_t является краткой записью $I[B(t), t]$, а нижний индекс у t_0 опускается, чтобы отразить тот факт, что это уравнение имеет место для любого $t \in [0, T]$.

Вообще говоря решение уравнения оптимальности является довольно трудной проблемой, поскольку оно объединяет в одном две трудные задачи краевую и вариационную. Однако в нашем случае эту трудную задачу можно свести к системе трех уравнений, два из которых являются алгебраическими и одно уравнение с частными производными. То есть объединенную задачу удается расчленить на задачи более простые. Для этого определим функцию

$$\phi(\omega, C; B, t) \equiv e^{(-\rho t)}U[C] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial B}\{[\omega(t)(\alpha - r) + r]B(t) - C\} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial B^2}\sigma^2\omega^2(t)B^2(t).$$

Тогда уравнение оптимальности переписывается в более компактном виде

$$\max_{\{C,\omega\}}\phi(\omega,\ C;\ B,\ t) = 0. \qquad (8)$$

Остается найти экстремум (максимум) функции $\phi(\omega,\ C;\ B,\ t)$ по ω и C. Затем, после подстановки экстремальных значений ω^* и C^* снова в $\phi(\omega,\ C;\ B,\ t)$, приставку max в (8) можно опустить и получается уравнение с частными производными, решение которого найти проще, чем решать уравнение оптимальности Беллмана – Дрейфуса.

Необходимыми условиями экстремума функции (8) являются

$$\phi_C(\omega^*,\ C^*;\ B,\ t) = 0 = e^{(-\rho t)}U'[C^*] - \frac{\partial I_t}{\partial B},$$

$$\phi_\omega(\omega^*,\ C^*;\ B,\ t) = 0 = \frac{\partial I_t}{\partial B}(\alpha - r)B + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial B^2}\sigma^2 B^2\omega^*.$$

Эти уравнения являются алгебраическими и из них при заданной функции полезности $U(C)$ легко находятся оптимальные значения ω^* и C^*. Достаточные условия максимума функции (8)

$$\phi_{\omega\omega} < 0,\ \ \phi_{CC} < 0,\ \ \det\begin{bmatrix}\phi_{\omega\omega} & \phi_{\omega C}\\ \phi_{C\omega} & \phi_{CC}\end{bmatrix} > 0,\ \ \phi_{\omega C} = \phi_{C\omega} = 0$$

легко проверяются.

Проблему решения уравнения с частными производными мы здесь обсуждать не будем, отсылая читателя к соответствующим учебникам.

Такова вкратце схема составления и модификации оптимального портфеля финансовых контрактов, на основе которого инвестор может диверсифицировать свою инвестиционную стратегию, обеспечивающую максимальную полезность его деятельности на финансовом рынке.

Приведенные примеры показывают, что задачи современной финансовой экономики требуют использования математических методов при описании процессов изменения рыночных показателей и формирования оптимальной деятельности инвесторов на рынке. Причем проблемы, к которым приводят эти методы, могут быть достаточно сложными и для их решения требуется применение информационных и компьютерных технологий. Поэтому настало время при формировании специалистов в области финансовой экономики (представляется, что это справедливо и для экономики в целом) стремиться к тому, чтобы инвесторы, действующие на финансовом рынке, обладали соответствующими знаниями, и их деятельность не противоречила экономическим закономерностям и не приводила к кризисным явлениям.

1. Медведев Г. А. Математические основы финансовой экономики / Г. А. Медведев. – Минск: БГУ, 2003. – Часть 1, 287 с., Часть 2, 293 с.
2. Financial Economics / Panjer H. H. (ed.). – Schaumburg: The Actuarial Foundation, 1998. – 670 p.
3. Weron A. Inżynieria Finansowa / Weron A., Weron R. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1999. – 432 s.

Medvedev G. A. Some problems of financial economics.

In article on examples it is shown, that problems of modern financial economics demand use of mathematical methods at the description of processes of change of market indicators and formations of optimum activity of investors in the market. The problems to which result these methods, can be difficult enough and for their decision application of information and computer technologies is required.